Крылатый квадрат

Теорема Ферма-Эйлера гласит: «Всякое простое число вида $4n+1$, где n — натуральное число, представимо в виде суммы квадратов натуральных чисел, причём единственным с точностью до перестановки слагаемых способом.»

Нарисуем квадрат со стороной a. От его левой верхней вершины отложим вверх отрезок длины b; от верхнего конца только построенного отрезка вправо отложим отрезок длины c; построим прямоугольник, двумя сторонами которого являются только что построенные отрезки. Вращая этот прямоугольник вокруг центра исходного квадрата на 90°, 180° и 270°, получим ещё три прямоугольника размером $b \cdot c$. Очевидно, возникла фигура площади $a^2 + 4bc$.

На рисунках 1, 2, 3 и 4 показаны все существующие 7 способов представить число 37 в виде $x^2 + 4yz$, где x, y и z — натуральные числа. Как видите, существует в точности 7 таких представлений, причём они естественным образом разбиваются на представление $37 = 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 9$ и три пары представлений.

В общем виде конструкция такова: поскольку имеется одно представление в виде «креста» $p = 1 + 4 \cdot n \cdot 1$ и ещё несколько пар (это слово — главное!), то количество N решений уравнения $p = a^2 + 4bc$ в натуральных числах a, b и c нечётно. Поскольку можно каждому решению (a, b, c) сопоставить решение (a, c, b), а число N нечётно, то хотя бы в одном решении $b = c$. А это и есть теорема Ферма-Эйлера.

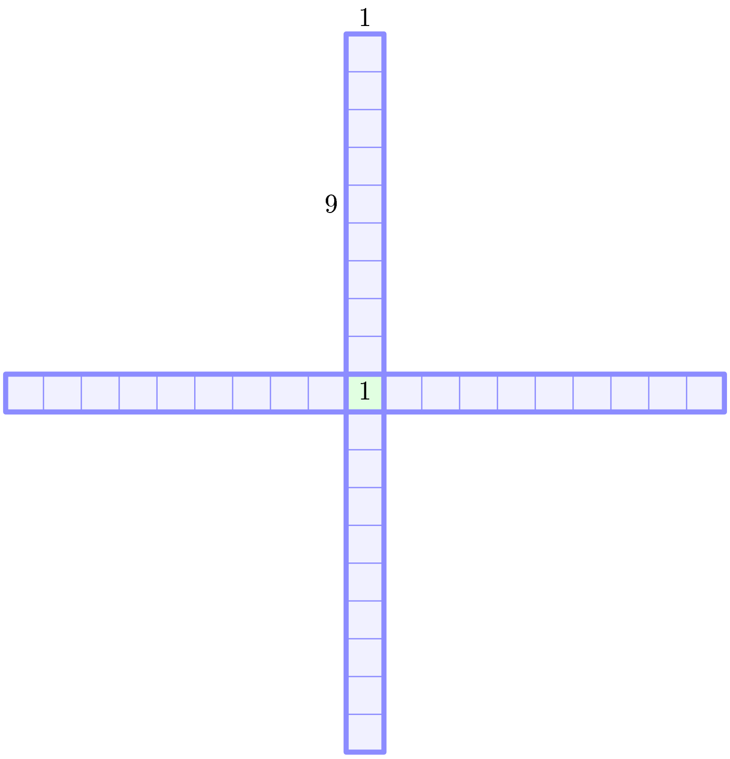

Рисунок 1

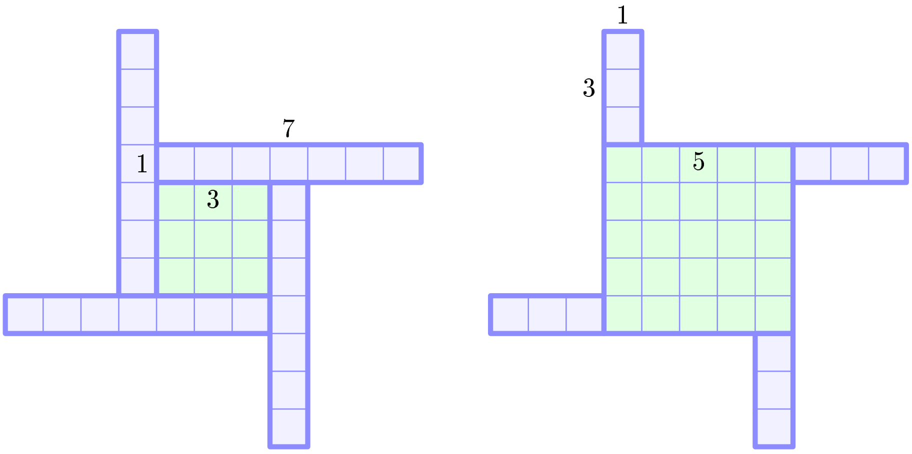

Рисунок 2

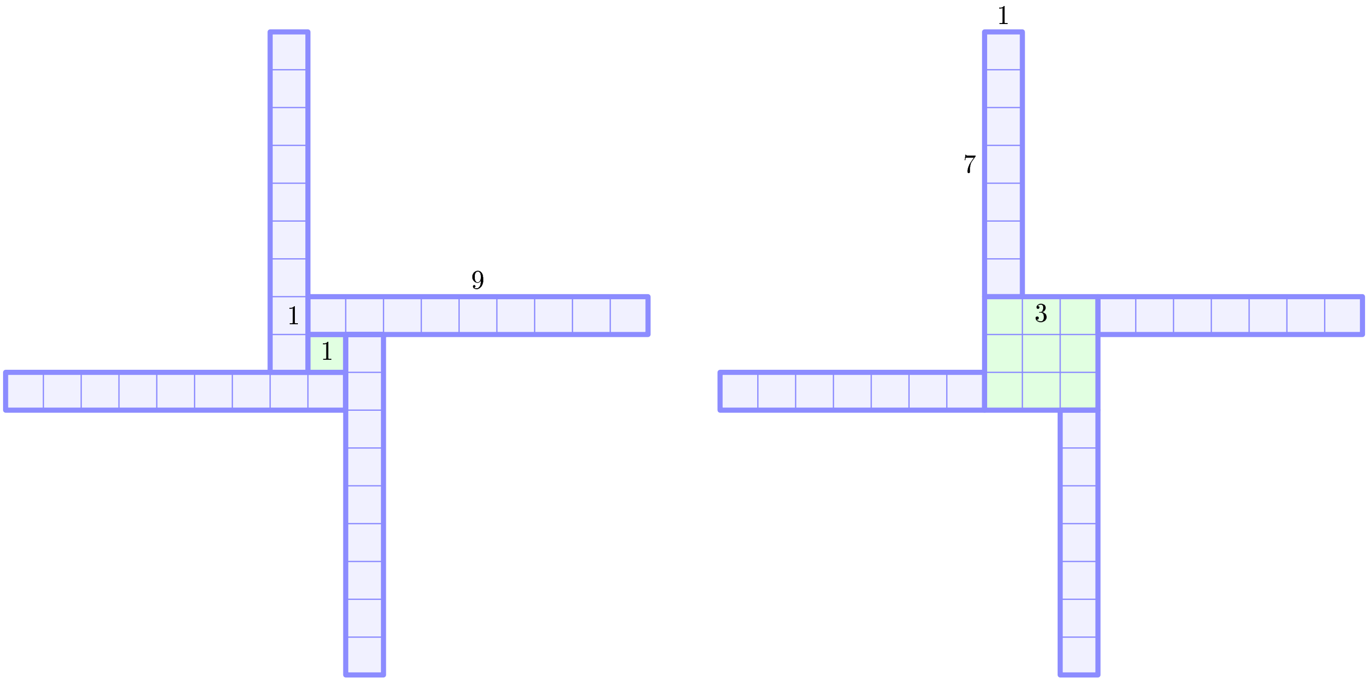

Рисунок 3

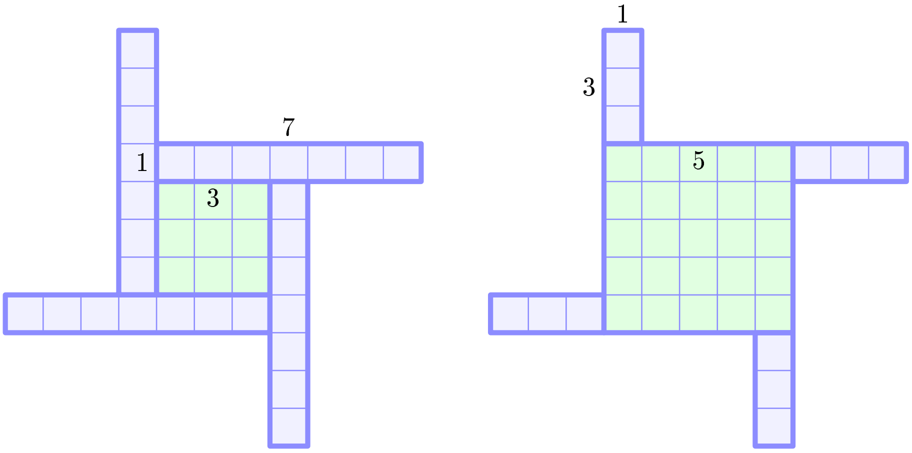

Рисунок 4