Сумма двух многочленов

В 1995 году Эндрю Вайлс решил одну из наиболее известных проблем арифметики — доказал великую теорему Ферма: уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в натуральных числах a, b, c, n, где $n > 2$.[*)]

В 2003 году П. Михайлеску доказал гипотезу Каталана: уравнение $x^y - z^t = 1$ имеет единственное решение $(x; y; z; t) = (3; 2; 2; 3)$ в натуральных числах, больших единицы.[†)]

Нет ли чего-то общего между этими теоремами? Есть! В 1981 году В. Стотерс сформулировал и доказал (правда, не для чисел, а для многочленов) такое утверждение. В 1983 году теорему Стотерса переоткрыл Р. Мейсон. Ученик выпускного класса Ноа Снайдер в 1998 году придумал более красивое доказательство.

Начнём с обозначений. $\deg f$ — это степень многочлена f, а $k(f)$ — количество его различных (как вещественных, так и комплексных) корней: если $f(x) = \alpha(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r}$, где α — ненулевое число, a_1, a_2, ..., a_r — различные числа (не важно, вещественные или комплексные), то $\deg f = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ и $k(f) = r$. Через $D(f)$ будем обозначать наибольший общий делитель многочлена f и его производной f'.

Лемма 1. $\deg f = \deg D(f) + k(f)$ для любого ненулевого многочлена f.

Доказательство. По формуле Лейбница дифференцирования произведения имеем: $f'(x) = \alpha(n_1(x - a_1)^{n_1 - 1}(x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r} + n_2(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2 - 1} \ldots (x - a_r)^{n_r} + \ldots + n_r(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \ldots (x - a_r)^{n_r - 1})$. Поэтому $D(f) = \text{НОД}(f(x); f'(x)) = \alpha(x - a_1)^{n_1 - 1}(x - a_2)^{n_2 - 1} \ldots (x - a_r)^{n_r - 1}$ (заметьте: старший коэффициент α можно было и не писать, поскольку наибольший общий делитель многочленов определён с точностью до постоянного ненулевого множителя) и, следовательно,

$$\deg D(f) = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_r - 1) = n_1 + n_2 + \ldots + n_r - r = \deg f - k(f).$$

Доказательство Снайдера

Рассмотрим равенство $f(x) + g(x) = h(x)$, где f и g — взаимно простые многочлены. Обозначим $J(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$. Очевидно, $J(x)$ делится как на $D(f) = \text{НОД}(f(x); f'(x))$, так и на $D(g)$. Поскольку

$$J(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)g(x) - g(x)g'(x) - f(x)g'(x) = (f'(x) + g'(x))g(x) - (f(x) + g(x))g'(x),$$

то $J(x) = h'(x)g(x) - h(x)g'(x)$ делится на $D(h)$. Вследствие взаимной простоты многочленов f и g многочлены $D(f)$ и $D(g)$ тоже взаимно просты. Из взаимной простоты многочленов f и h следует взаимная простота многочленов $D(f)$ и $D(h)$; а из взаимной простоты многочленов g и h следует взаимная простота многочленов $D(g)$ и $D(h)$.

[*)] Об этом рассказано в статье Ю. Соловьёва «Гипотеза Таниямы и последняя теорема Ферма» в четвёртом номере 1999 года.

[†)] Гипотезе Каталана посвящена статья В. Сендерова и Б. Френкина четвёртого номера прошлого года.

Таким образом, многочлен J делится на произведение $D(f)D(g)D(h)$, так что степень многочлена J не меньше суммы степеней этих трёх наибольших делителей. Поскольку степень производной любого многочлена на единицу меньше степени самого этого многочлена, то $\deg J$ не превосходит $\deg f+\deg g-1$ и, следовательно,

$$\deg f+\deg g-1 \geqslant \deg J \geqslant \deg f-k(f)+\deg g-k(g)+\deg h-k(h),$$

то есть $k(f)+k(g)+k(h)-1 \geqslant \deg h$. Поскольку $k(f)+k(g)+k(h)=k(fgh)$, то мы доказали теорему Стотерса–Мейсона–Снайдера: *степень суммы любых двух взаимно простых многочленов меньше количества корней произведения этих многочленов и их суммы.*

Поскольку равенство $f+g=h$ можно записать как в виде $f=g+(-h)$, так и виде $g=h+(-f)$, то не только степень суммы, но и степень любого из двух взаимно простых многочленов меньше количества корней произведения этих многочленов и их суммы.

Доказательство Мейсона–Стотерса

Доказательство Мейсона–Стотерса использует логарифмические производные. По определению, логарифмическая производная функции f — это частное f'/f от деления производной на саму функцию.

Лемма 2. Логарифмическая производная произведения (частного) равна сумме (разности) логарифмических производных: $\frac{(fg)'}{fg}=\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}$ и $\frac{(f/g)'}{f/g}=\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}$.

Доказательство следует из известных формул $(fg)'=f'g+fg'$ и $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$ дифференцирования произведения и частного.

Следствие из леммы 2. Логарифмическая производная многочлена $\alpha(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_r)^{n_r}$ равна сумме $\frac{n_1}{x-a_1}+\frac{n_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{n_r}{x-a_r}$.

Перейдём к самому доказательству Мейсона–Стотерса. Равенство $f+g=h$ запишем в виде $\frac{f}{g}+1=\frac{h}{g}$ и продифференцируем обе его части: $\left(\frac{f}{g}\right)'=\left(\frac{h}{g}\right)'$. Теперь частное f/g можно записать в виде

$$\frac{f}{h}=\frac{f/g}{h/g}=\frac{(h/g)'}{h/g}\frac{f/g}{(f/g)'}.$$

Применим к каждой из логарифмических производных $\frac{(h/g)'}{h/g}$ и $\frac{(f/g)'}{f/g}$ лемму 2:

$$\frac{f}{h}=\frac{\frac{h'}{h}-\frac{g'}{g}}{\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}}.$$

Основная теорема алгебры гласит: всякий многочлен можно разложить в произведение множителей первой степени (возможно, с комплексными, а не вещественными коэффициентами). Таким образом, $f(x)=\alpha(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_r)^{n_r}$, $g(x)=\beta(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}\ldots(x-b_s)^{m_s}$ и $h(x)=\gamma(x-c_1)^{l_1}(x-c_2)^{l_2}\ldots(x-c_t)^{l_t}$. В силу следствия из леммы 2,

$$\frac{f}{h}=\frac{\frac{l_1}{x-c_1}+\frac{l_2}{x-c_2}+\ldots+\frac{l_t}{x-c_t}-\frac{m_1}{x-b_1}+\frac{m_2}{x-b_2}+\ldots+\frac{m_s}{x-b_s}}{\frac{n_1}{x-a_1}+\frac{n_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{n_r}{x-a_r}-\frac{m_1}{x-b_1}+\frac{m_2}{x-b_2}+\ldots+\frac{m_s}{x-b_s}}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_r)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_s)(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_t)$, мы представим частное f/g в виде отношения многочленов степени не выше $r+s+t-1=k(fgh)-1$, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. *Воспользовавшись равенством* $(\ln x)'=1/x$ *и правилом дифференцирования композиции функций, поймите, что производная логарифма любой функции равна логарифмической производной этой функции.*

Великая теорема Ферма для многочленов

Пусть a, b, c — натуральные числа, каждое из которых больше 2. Предположим, что для некоторых двух взаимно простых многочленов f и g верно равенство $f^a(x) + g^b(x) = h^c(x)$, где h — многочлен. В силу теоремы Стотерса–Мейсона–Снайдера числа $\deg f^a = a\deg f$, $b\deg g$ и $c\deg h$ меньше числа $k(fgh)$. Получаем противоречие:

$$3(\deg f + \deg g + \deg h) \leqslant a\deg f + b\deg g + c\deg h < 3k(fgh) \leqslant 3(\deg f + \deg g + \deg h).$$

Упражнения

2. *Если n — натуральное число, $n > 2$, то сумма n-х степеней двух многочленов может быть n-й степенью только в случае, когда эти многочлены отличаются один от другого некоторым постоянным множителем. Докажите это.*

3. *Уравнение $f^5(x) + g^6(x) = h^7(x)$ имеет бесконечно много решений в многочленах f, g, h, ни один из которых не является постоянной величиной. Докажите это.*

Теорема Дэвенпорта

Пусть F и G — многочлены, отличные от константы, для которых многочлен $H(x) = F^3(x) - G^2(x)$ хотя бы в одной точке отличен от нуля. В 1965 году Дэвенпорт доказал неравенства $\deg F \leqslant 2\deg H - 2$ и $\deg G \leqslant 3\deg H - 3$.

Обозначим наибольший общий делитель многочленов F и G буквой D, так что $F(x) = D(x)f(x)$ и $G(x) = D(x)g(x)$, где $\text{НОД}(f; g) = 1$. Имеем:

$$H(x) = D^2(x)(D(x)f^3(x) - g^2(x)).$$

Таким образом, обозначив $d(x) = \text{НОД}(D(x); g^2(x))$ и $H(x) = D^2(x)d(x)h(x)$, получаем равенство

$$h(x) = f^3(x)\frac{D(x)}{d(x)} - \frac{g^2(x)}{d(x)},$$

к которому можно применить теорему Стотерса–Мейсона–Снайдера. Поскольку корней у многочлена $h(x)f^3(x)\frac{D(x)}{d(x)}\frac{g^2(x)}{d(x)}$ столько же, сколько и у многочлена $h(x)f(x)\frac{D(x)}{d(x)}g(x)$, то количество корней не превосходит числа $\deg h + \deg f + \deg D - \deg d + \deg g$ и из теоремы Стотерса–Мейсона–Снайдера следуют неравенства

$$\begin{cases} 3\deg f + \deg D - \deg d \leqslant \deg h + \deg f + \deg D - \deg d + \deg g - 1, \\ 2\deg g - \deg d \leqslant \deg h + \deg f + \deg D - \deg d + \deg g - 1. \end{cases}$$

Эти неравенства можно упростить:

$$\begin{cases} 2\deg f \leqslant \deg h + \deg g - 1, \\ \deg g \leqslant \deg h + \deg f + \deg D - 1. \end{cases}$$

Складывая их почленно и приводя подобные, получаем

$$\deg f \leqslant 2\deg h + \deg D - 2,$$

откуда $\deg F = \deg D + \deg f \leqslant 2\deg h + 2\deg D - 2 \leqslant 2\deg H - 2$. Одно из неравенств Дэвенпорта доказано!

Другое доказываем аналогично: складывая почленно неравенство

$$2\deg f \leqslant \deg h + \deg g - 1$$

с (полученным умножением на 2 обеих частей второго неравенства имеющейся системы) неравенством

$$2\deg g \leqslant 2\deg h + 2\deg f + 2\deg D - 2,$$

получаем

$$\deg g \leqslant 3\deg h + 2\deg D - 3,$$

откуда $\deg G = \deg D + \deg g \leqslant 3\deg h + 3\deg D - 3 \leqslant 3\deg H - 3$, что и требовалось доказать.

Гипотеза Массера и Остерле

Нам удалось вывести великую теорему Ферма и теорему Дэвенпорта из теоремы Стотерса–Мейсона–Снайдера благодаря тому, что величина k не зависит от показателей степеней, с которыми входят множители в разложение многочлена на неприводимые многочлены. Рассмотрим функцию K, определённую на множестве всех натуральных чисел следующей формулой:

$$K(p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_r^{n_r}) = p_1p_2\dots p_r,$$

где p_1, p_2, ..., p_r — различные простые числа.

Интересно, для любых ли взаимно простых натуральных чисел a и b верно неравенство

$$a + b < K(ab(a+b))?$$

К сожалению, не для любых: если $a = 1$ и $b = 8$, то $a + b = 9$ и $K(72) = 6 < 9$. Может быть, существует такое постоянное число c, что для любых взаимно простых натуральных чисел a и b верно неравенство

$$a + b < cK(ab(a+b))?$$

Ответ опять отрицательный: если $a = 1$ и $b = 3^{2^n} - 1$, где n — натуральное число, то $a + b = 3^{2^n}$. По индукции легко доказать, что $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2}. Поэтому

$$K(ab(a+b)) = K(3(3^{2^n} - 1)) \leqslant 3\frac{3^{2^n} - 1}{2^{n+1}} < 3\frac{a+b}{2^{n+1}},$$

так что $a + b > \frac{2^{n+1}}{3}K(ab(a+b))$.

В 1986 году Массер и Остерле предположили, что для любого положительного числа ε существует такое число C, что для любых натуральных чисел a и b верно неравенство

$$a + b < CK^{1+\varepsilon}(ab(a+b)).$$

Большинство специалистов уверены — так же, как почти 4 века верили в справедливость Великой теоремы Ферма — что эта гипотеза верна. Но пока она не доказана ни для какого ε.