Существование решения уравнения Пелля

Удивительно короткое и красивое доказательство теоремы о существовании решения уравнения Пелля опубликовал в 2008 году Н. Вайлдбергер (Сидней, Австралия). Оно использует квадратичные формы — выражения вида $ax^2+2bxy+cy^2$, где a, b и c — числа, x и y — переменные. Например,

$$\begin{array}{rcrcl} & & & & x^2-2y^2,\\ & & (x+y)^2-2y^2 & = & x^2+2xy-y^2,\\ x^2+2x(x+y)-(x+y)^2 & = & (2x+y)^2-2(x+y)^2 & = & 2x^2-y^2,\\ 2x^2-(x+y)^2 & = & (3x+y)^2-2(2x+y)^2 & = & x^2-2xy-y^2,\\ (x+y)^2-2(x+y)y-y^2 & = & (3x+4y)^2-2(2x+3y)^2 & = & x^2-2y^2 \end{array}$$

— квадратичные формы. Вот ещё несколько квадратичных форм:

$$\begin{array}{rcrcl} & & & & x^2-7y^2,\\ & & (x+y)^2-7y^2 & = & x^2+2xy-6y^2,\\ (x+y)^2+2(x+y)y-6y^2 & = & (x+2y)^2-7y^2 & = & x^2+4xy-3y^2,\\ x^2+4x(x+y)-3(x+y)^2 & = & (3x+2y)^2-7(x+y)^2 & = & 2x^2-2xy-3y^2,\\ 2(x+y)^2-2(x+y)y-3y^2 & = & (3x+5y)^2-7(x+2y)^2 & = & 2x^2+2xy-3y^2,\\ 2x^2+2x(x+y)-3(x+y)^2 & = & (8x+5y)^2-7(3x+2y)^2 & = & x^2-4xy-3y^2,\\ (x+y)^2-4(x+y)y-3y^2 & = & (8x+13y)^2-7(3x+5y)^2 & = & x^2-2xy-6y^2,\\ (x+y)^2-2(x+y)y-6y^2 & = & (8x+21y)^2-7(3x+8y)^2 & = & x^2-7y^2. \end{array}$$

Это не случайные списки, а последовательности форм, рассматриваемые при $d=2$ и $d=7$ соответственно. Идея состоит в том, что мы, начиная с x^2-dy^2, из очередной квадратичной формы $g(x,y)=ax^2+2xy+cy^2$ получаем либо

$$g(x+y,y)=a(x+y)^2+2b(x+y)y+cy^2=ax^2+2(a+b)xy+(a+2b+c)y^2, \quad (1)$$

либо

$$g(x,x+y)=ax^2+2bx(x+y)+c(x+y)^2=(a+2b+c)x^2+2(b+c)xy+cy^2. \quad (2)$$

Правило, по которому выбираем, какую именно из переменных x и y заменять на $x+y$, такое: коэффициенты при x^2 и y^2 должны быть разных знаков, точнее, $a>0$ и $c<0$. Это значит, что если $a+2b+c<0$, то применяем формулу (1), а если $a+2b+c>0$, то формулу (2).

Теорема. *Рано или поздно будет получено тождество вида*

$$(\alpha x+\beta y)^2-d(\gamma x+\delta y)^2=x^2-dy^2,$$

где α, β, γ и δ — натуральные числа. (Это тождество позволяет из одного решения уравнения $x^2-dy^2=1$ получать другое, например, из решения $(x;y)=(1;0)$ — решение $(\alpha;\gamma)$.)

Доказательство. Каждый, кто учился решать квадратные уравнения, вычислял дискриминант

$$D=(2b)^2-4ac=4(b^2-ac).$$

Поскольку

$$(a+b)^2 - a(a+2b+c) = b^2 - ac = (b+c)^2 - (a+2b+c)c,$$

то дискриминанты всех форм последовательности Вайлдбергера одинаковы и равны дискриминанту формы $x^2 - dy^2$, то есть числу $4d$.

Поскольку $4d$ не является квадратом целого числа, то ни в одной из форм последовательности ни коэффициент при x^2, ни коэффициент при y^2 не равны 0; следовательно, сформулированное выше правило однозначно определяет бесконечную последовательность форм.

Коэффициенты a, b, c любой из форм $ax^2 + 2bx + cx^2$ последовательности Вайлдбергера удовлетворяют равенству

$$4(b^2 - ac) = 4d.$$

Таким образом,

$$0 < -ac = d - b^2 \leqslant d.$$

Количество решений этой системы неравенств в целых числах конечно. Поскольку число b с точностью до знака определяется из равенства $b^2 = d + ac$, то множество форм, которые при данном d могут встретиться в последовательности Вайлбергера, конечно. Следовательно, рано или поздно некоторая форма повторится. Мы доказали, что последовательность периодическая.

Может ди она иметь предпериод? Нет, в силу следующей леммы.

Лемма. *Каждая форма $f(x, y) = Ax^2 + 2Bx + Cy^2$ последовательности Вайлдбергера однозначно определяет не только следующую за ней, но и предыдущую.*

Доказательство. Форма f получается быть получена из некоторой формы g либо по формуле (1), либо по формуле (2). В первом случае

$$f(1, -1) = g(1-1, 1) = g(0, 1) < 0,$$

а во втором случае

$$f(1, -1) = g(1, 1-1) = g(1, 0) > 0.$$

Значит, знак величины $f(1, -1)$ однозначно определяет, какая из двух формул применялась!