Формула крюков

Что для нас — головоломка,
духом тайны разум будит —
очевидно, для потомка
просто школьным курсом будет.
И. Губерман

Первые примеры

На рисунке 1 показаны все существующие 16 способов так заполнить таблицу, состоящую из 6 клеток, числами от 1 до 6, что числа возрастают при движении слева направо и сверху вниз. На рисунке 2 — пять заполнений таблицы из 5 клеток (других способов, как легко убедиться, нет); на рисунке 3 — два заполнения таблицы из 3 клеток; на рисунке 4 — единственный способ заполнить «столбик» высотой 5 (очевидно, способ единственный и при любой другой высоте столбика).

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&5&\\6&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&6&\\5&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&4\\3&5&\\6&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&4\\3&6&\\5&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&5\\3&4&\\6&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&5\\3&6&\\4&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&6\\3&4&\\5&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&6\\3&5&\\4&&\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}1&3&4\\2&5&\\6&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&4\\2&6&\\5&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&5\\2&4&\\6&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&5\\2&6&\\4&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&6\\2&4&\\5&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&6\\2&5&\\4&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&4&5\\2&6&\\3&&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&4&6\\2&5&\\3&&\end{array}$$

Рисунок 1

$$\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&5&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&4\\3&5&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&5\\3&4&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&4\\3&5&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&5\\2&4&\end{array}\qquad\begin{array}{cc}1&2\\3&\end{array}\quad\begin{array}{cc}1&3\\2&\end{array}\qquad\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}$$

Рисунок 2 *Рисунок 3* *Рисунок 4*

Числа сочетаний и числа Каталана

Рассмотрим таблицу, состоящую из $m+n+1$ клеток, $m+1$ из которых расположены в верхней строке, а $n+1$ — в левом столбце. Пример для $m=3$ и $n=2$ — рисунок 5; число 1 в любом случае расположено в левом верхнем углу; заполнение однозначно определено тем, какие именно три числа стоят в незаполненных клетках верхней строки. Интересующее нас количество заполнений равно $C_{m+n}^{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$ — числу способов выбрать m чисел из множества $\{2, 3, \ldots, m+n+1\}$, состоящего из $m+n$ элементов.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&&&\\\hline \\\cline{1-1} \\\cline{1-1}\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}1&2&3\\4&5&6\\&((()))&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&4\\3&5&6\\&(()())&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&2&5\\3&4&6\\&(())()&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&4\\3&5&6\\&()(())&\end{array}\quad\begin{array}{ccc}1&3&5\\2&4&6\\&()()()&\end{array}$$

Рисунок 5 *Рисунок 6*

Количество заполнений прямоугольной таблицы размером $2 \times n$ называют числом Каталана. Любой такой таблице можно сопоставить последовательность из $2n$ скобок, если ставить открывающие скобки на позиции, номера которых стоят в верхней строке, а закрывающие скобки — на остальные места: на рисунке 6 изображены все 5 существующих расстановок для $n = 3$ вместе с соответствующими системами скобок. Возникающие так последовательности правильные в том смысле, что при чтении слева направо ни в какой момент количество открывшихся скобок не оказывается меньше количества закрывшихся, а после прочтения последней (закрывающей) скобки эти количества становятся равными n.

Упражнение 1. *Уясните, что заполнений прямоугольной таблицы размером 2×3 столько же, сколько заполнений таблицы рисунка 2, а заполнений таблицы размером 2×2 столько же, сколько заполнений таблицы рисунка 3.*

Отбрасывание клеток

Выясним, сколько существует заполнений таблицы рисунка 7. Не советую выписывать все таблицы подряд: ответ слишком велик, чтобы вы получили удовольствие от такой работы. А главное — мы хотим найти не ответ для одной конкретной таблицы, а общие закономерности.

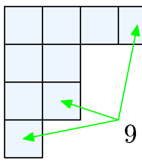


Рисунок 7

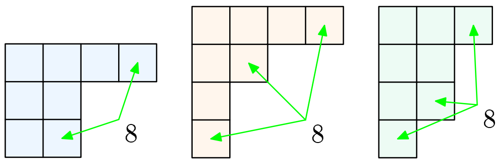


Рисунок 8

Начнём. Где может стоять число 9? В клетке, ни правее, ни ниже которой ничего нет. Такие клетки на рисунке 7 помечены стрелочками. Отбрасывая их по одной, получаем таблицы рисунка 8. Для каждой из них мы посчитаем количество способов и сложим результаты.

Число 8 в левой таблице рисунка 8 может стоять на одной из двух отмеченных стрелочками клеток, а в центральной и правой таблицах таких клеток по три. Значит, достаточно решить задачу для каждой из восьми таблиц рисунка 9 и сложить результаты. Облегчает работу то, что результаты для первой, третьей, пятой и седьмой таблиц не отличаются; не отличается и вторая таблица от шестой.

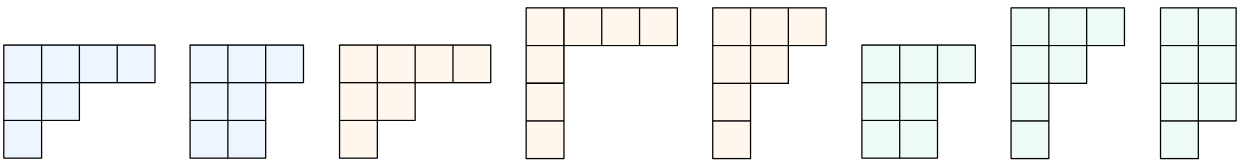


Рисунок 9

Количество заполнений четвёртой таблицы равно $C_6^3 = 20$. При помощи рисунков 10, 11 и 12 легко найти ответы — числа $4 + 5 + 10 + 16 = 35$, $16 + 5 = 21$ и $5 + 5 + 4 = 9$ — для первой, второй и восьмой таблиц рисунка 9 соответственно. Таким образом, для рисунка 7 существует $4 \cdot 35 + 20 + 2 \cdot 21 + 14 = 216$ заполнений.

Ответ найден. Нам не пришлось рисовать все 216 таблиц одну за другой. Но наш способ не самый быстрый: ответ даёт открытая в 1954 году *формула крюков*.

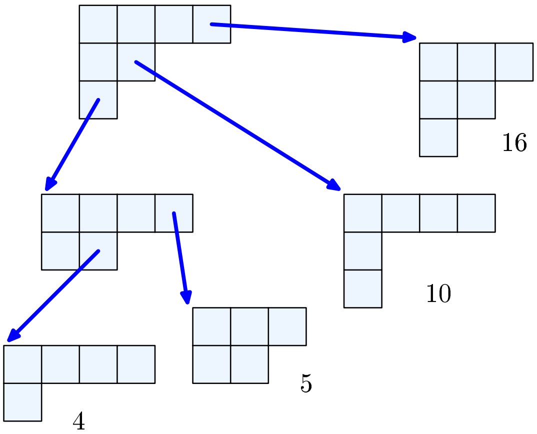


Рисунок 10

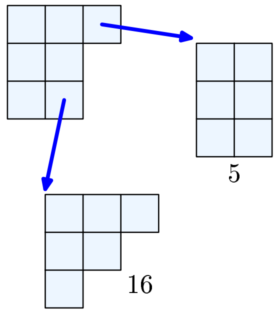


Рисунок 11

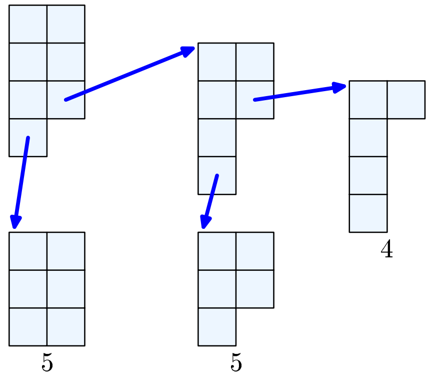


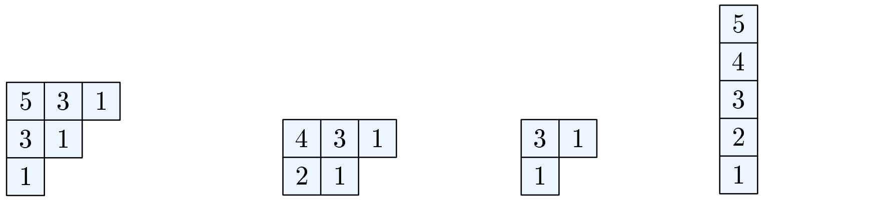
Рисунок 12

Крюки

Крюк клетки — это она сама, а также клетки, расположенные справа от неё, и клетки, расположенные снизу. Длина крюка — это количество его клеток. На рисунке 13 для некоторых из встретившихся нам таблиц указаны длины крюков и показано, как для каждой из них выглядит формула крюков.

Теорема. *Количество заполнений таблицы равно факториалу количества её клеток, делённому на произведение длин всех её крюков.*

Наше доказательство основано на свойствах антисимметрических многочленов. Сначала введём удобные обозначения.



$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot1\cdot1\cdot3\cdot3\cdot5} = 16$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5$ $\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot1\cdot3} = 2$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 1$

$\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot6} = 10$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4} = 10$ $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot7} = 216$

Рисунок 13

Обозначения

Обозначим буквой k количество строк рассматриваемой таблицы; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — их длины, причём нумеруем сверху вниз: первая строка самая длинная, вторая той же длины или короче первой, и так далее: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$. Например, для таблицы рисунка 14 имеем: $\lambda_1 = 13$, $\lambda_2 = 10$, $\lambda_3 = 7$, $\lambda_4 = 7$, $\lambda_5 = 4$, $\lambda_6 = 4$, $\lambda_7 = 4$, $\lambda_8 = 4$, $\lambda_9 = 1$ и $\lambda_{10} = 1$.

Длина крюка верхней левой (угловой) клетки равна $\lambda_1 + k - 1$. Длина крюка клетки, расположенной непосредственно под ней, равна $\lambda_2 + k - 2$. Вообще, длина l_m крюка m-й сверху клетки левого столбца равна $\lambda_m + k - m$. Очевидно, последовательность длин крюков l_1, l_2, ..., l_k строго убывающая: $l_1 > l_2 > \ldots > l_k$.

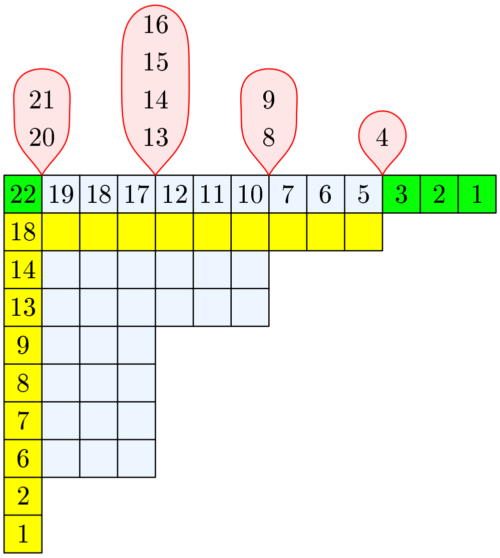


Рисунок 14

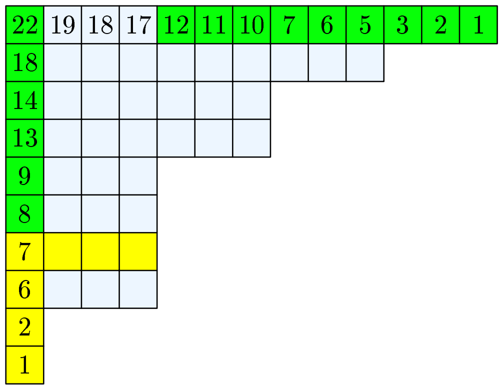


Рисунок 15

Крюки клеток первой строки и левого столбца

Среди длин крюков верхней строки рисунка 14 отсутствуют числа 4, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20 и 21. И вот что интересно: $22 - 18 = 4$, $22 - 14 = 8$, $22 - 13 = 9$, $22 - 9 = 13$, $22 - 8 = 14$, $22 - 7 = 15$, $22 - 6 = 16$, $22 - 2 = 20$ и $22 - 1 = 21$.

Лемма 1. *Среди длин крюков чисел верхней строки присутствуют все числа от 1 до* l_1, *кроме разностей* $l_1 - l_m$, *где* $1 < m \leqslant k$.

Идея доказательства. При движении вдоль верхней строки рисунка 14 справа налево сначала длины крюков — последовательные числа 1, 2 и 3. Первое отсутствующее число — 4. Разность количеств клеток крюка длины 22, состоящего из всех клеток верхней строки и левого столбца, и жёлтого крюка длины 18 равна количеству зелёных клеток — числу 4.

Разность между числом 22 и числом 7 — количеством клеток жёлтого крюка рисунка 15 — равна количеству зелёных клеток этого рисунка. Больше ничего объяснять не нужно — вы уже всё поняли.

Новый вид формулы крюков

Вследствие леммы 1, произведение длин крюков первой строки таблицы равно числу $l_1!$, делённому на произведение $(l_1 - l_2)(l_1 - l_3)\ldots(l_1 - l_k)$.

Отбросив верхнюю строку, мы получаем таблицу, к верхней строке которой — второй строке исходной таблицы — применима та же лемма. Таким образом, длины крюков второй строки — числа от 1 до l_2, кроме разностей $l_2 - l_3$, ..., $l_2 - l_k$. Рассуждая так же для третьей, четвёртой и всех следующих строк, приходим к выводу: произведение длин крюков всех клеток таблицы равно произведению факториалов $l_1!l_2!\dots l_k!$, делённому на произведение всевозможных разностей $l_j - l_m$, где $1 \leqslant j < m \leqslant k$.

Поэтому формула крюков означает, что интересующее нас количество расстановок равно величине

$$F(l_1, l_2 \dots, l_k) = \frac{n! \prod\limits_{1 \leqslant j < m \leqslant k} (l_j - l_m)}{l_1!l_2!\dots l_k!},$$

где $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{k-1} + \lambda_k = l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + l_k - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1$.

Умножение на нуль

В числителе дроби F присутствуют все разности вида $l_j - l_m$. Поэтому величина $F(l_1, l_2, \dots, l_k)$ равна нулю, если в последовательности l_1, l_2, ..., l_k есть совпадающие числа: $l_j = l_m$ при $j \neq m$.

Вы помните, что $l_1 > l_2 > \dots > l_k$. Тем не менее, вышесказанное — истина, хотя вам наверняка пока кажется, что она не ко двору.

Сформулируем это свойство функции F чуть иначе. Поменяем местами l_1 и l_2. Разность $l_1 - l_2$ заменится на $l_2 - l_1 = -(l_1 - l_2)$, а другие множители числителя и знаменателя поменяются друг с другом местами или останутся неизменными. Значит,

$$F(l_1, l_2, l_3 \dots, l_k) = -F(l_2, l_1, l_3 \dots, l_k).$$

Немного подумав, вы поймёте, что величина F меняется на противоположную не только при замене l_1 на l_2 и l_2 на l_1, но и при перестановке любых двух аргументов — так называемой транспозиции. Такие функции F называют антисимметрическими.

Симметрическими называют функции, не меняющие своё значение ни при какой перестановке аргументов.

Упражнения

2. *Множество S_k всех перестановок множества первых k натуральных чисел можно разбить на две равные половины. Все перестановки σ одной из них — так называемые нечётные перестановки — обладают тем свойством, что $F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = -F(l_1, l_2, l_3 \dots, l_k)$. Перестановки из другой половины — чётные — удовлетворяют равенству $F(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, \dots, l_{\sigma(k)}) = F(l_1, l_2, l_3 \dots, l_k)$. Докажите это.*

3. *Если многочлен $g(x, y)$ антисимметричен, то существует такой симметрический многочлен $h(x, y)$, что $g(x, y) = (x - y)h(x, y)$. Докажите это.*

4. *Всякий антисимметрический многочлен $g(l_1, l_2 \dots, l_k)$ представим в виде произведения всевозможных разностей вида $l_j - l_m$, где $1 \leqslant j < m \leqslant k$, и некоторого симметрического многочлена. Докажите это.*

Вычитание нуля

Пусть $l_k = 0$. (Вы помните, что такого не бывает. Но я хочу рассмотреть эту ситуацию — пригодится!) Поскольку $l_1 - 0 = l_1$, $l_2 - 0 = l_2$, ..., $l_{k-1} - 0 = l_{k-1}$ и $n = l_1 + l_2 + \dots + l_{k-1} + 0 - (k-1) - (k-2) - \dots - 2 - 1 = (l_1 - 1) + (l_2 - 1) + \dots + (l_{k-1} - 1) - (k-2) - \dots - 2 - 1$, то

$$F(l_1, l_2, \dots, l_{k-1}, 0) = F(l_1 - 1, l_2 - 1, \dots, l_{k-1} - 1).$$

Индукционный переход

Для $k = 1$ и $\lambda_1 = 1$ формула крюков тривиальна: $1 = \frac{1!}{1!}$. Применим индукцию. Предположив, что формула крюков верна для всех таблиц, состоящих из $n-1$ клеток, докажем её для n-клеточной таблицы. Для этого воспользуемся приёмом, который мы уже обсуждали — отбрасыванием клеток.

Переход от таблицы рисунка 7 к таблицам рисунка 8 соответствуют формуле

$$F(7,4,3,1) = F(6,3,2) + F(7,4,2,1) + F(6,4,3,1).$$

Поскольку $F(6,3,2) = F(7,4,3,0)$ и $F(7,3,3,1) = 0$, её можно записать в виде

$$F(7,4,3,1) = F(6,4,3,1) + F(7,3,3,1) + F(7,4,2,1) + F(7,4,3,0).$$

По очереди каждый аргумент уменьшаем на 1. В общем виде формула такова:

$$F(l_1, l_2, \ldots, l_k) = F(l_1-1, l_2, \ldots, l_k) + F(l_1, l_2-1, \ldots, l_k) + \ldots + F(l_1, l_2, \ldots, l_k-1). \quad (*)$$

В правой части k слагаемых: мы как бы по очереди отбрасываем из каждой строки её самую правую клетку (хотя, как вы помните, на самом деле следует отбрасывать самые правые клетки не из всех подряд строк, а только те, под которыми нет клеток таблицы,— «лишние» слагаемые всё равно нулевые).

Лемма 2. *Если функция F антисимметрична, то антисимметрична и функция* $F(l_1-1, l_2, \ldots, l_{k-1}, l_k) + F(l_1, l_2-1, \ldots, l_{k-1}, l_k) + \ldots + F(l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}-1, l_k) + F(l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}, l_k-1)$.

Доказательство. Меняя местами l_1 и l_2, получаем $F(l_2-1, l_1, \ldots, l_k) + F(l_2, l_1-1, \ldots, l_k) + \ldots + F(l_2, l_1, \ldots, l_{k-1}-1, l_k) + F(l_2, l_1, \ldots, l_k-1)$. Очевидно, $F(l_2-1, l_1, \ldots, l_k) = -F(l_1, l_2-1, \ldots, l_k)$, $F(l_2, l_1-1, \ldots, l_k) = -F(l_1-1, l_2, \ldots, l_k)$, $\ldots$, $F(l_2, l_1, \ldots, l_{k-1}-1, l_k) = -F(l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}-1, l_k)$ и $F(l_2, l_1, \ldots, l_k-1) = -F(l_1, l_2, \ldots, l_k-1)$. При любой другой транспозиции ситуация аналогична. Лемма доказана.

Ни правая, ни левая части равенства $(*)$ — не многочлены: «мешаются» факториалы. Однако, разделив обе части на $(n-1)!$ и домножив на $l_1! l_2! \ldots l_k!$, приходим к необходимости доказать тождество

$$\begin{aligned} n \prod_{1\leqslant j<m\leqslant k}(l_j - l_m) &= l_1 \prod_{1<m\leqslant k}(l_1 - 1 - l_m) \prod_{2\leqslant j<m\leqslant k}(l_j - l_m) + \\ &+ l_2(l_1 - (l_2-1)) \prod_{2<m\leqslant k}(l_1 - l_m) \prod_{2<m\leqslant k}(l_2 - 1 - l_m) \prod_{3\leqslant j<m\leqslant k}(l_j - l_m) + \ldots \\ &\ldots + l_k \prod_{1\leqslant j<m<k}(l_j - l_m) \prod_{1\leqslant j<k}(l_j - (l_k - 1)). \qquad (**) \end{aligned}$$

Выписано оно только шика ради. А принципиально то, что вследствие леммы 2 правая часть $(**)$ — антисимметрический многочлен от l_1, l_2, $\ldots$, l_k, так что правая часть делится на всевозможные разности этих переменных, а частное от деления — симметрический многочлен $h(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ первой степени. (Первой — поскольку степень правой части больше степени левой части вследствие наличия множителей l_1, l_2, $\ldots$, l_k соответственно в каждом из k слагаемых правой части.)

Коэффициент при l_1^k в правой части формулы (**) равен произведению $\prod\limits_{2\leqslant j<m\leqslant k}(l_j - l_m)$, а коэффициент при l_1^{k-1} в многочлене $\prod\limits_{1\leqslant j<m\leqslant k}(l_j - l_m)$ ровно такой же. Следовательно,

$$h(l_1, l_2, \ldots, l_k) = l_1 + l_2 + \ldots + l_k - a,$$

где величина a зависит только от k, а не от l_1, l_2, ..., l_k.

Сделать последний шаг — обосновать равенство $a = 1 + 2 + \ldots + (k-1)$ — легко: поскольку для любого натурального k формула крюков верна для столбика высотой k, то для обеспечения правильного перехода от столбика высотой $k-1$ к столбику высотой k величина a именно такая, как надо!