Раскраски графов и линейные уравнения

В.Л. Дорофеев, А.В. Спивак

Величайшие истины — самые простые.

Л.Н. Толстой

И.Ф. Акулич рассмотрел раскраски шахматной доски и других клетчатых фигур, в которых каждая чёрная клетка граничит с чётным числом чёрных клеток, а каждая белая граничит с нечётным число чёрных. В статье «Призрак Леонардо» первого номера «Кванта» 2008 года он поставил несколько интересных вопросов, тесно связанных с системами линейных уравнений, решать которые надо «по модулю два» (чётные числа соответствуют белому цвету, нечётные — чёрному).

Раскраски и системы сравнений

Напомним, о каких раскрасках идёт речь. Рассмотрим произвольный конечный граф — например, изображённый на рисунке 1. Акулич спрашивает, можно ли покрасить некоторые вершины так, чтобы у каждой покрашенной вершины было чётное число покрашенных соседок (соседними называем вершины, соединённые ребром), а у каждой непокрашенной вершины — нечётное число покрашенных соседок.

Для некоторых графов он при помощи компьютера нашёл все такие раскраски. Например, для графа рисунка 2 раскраска единственная, а на рисунке 3 изображены пять из 16 существующих раскрасок соответствующего графа — остальные получаются при помощи поворотов и осевых симметрий.

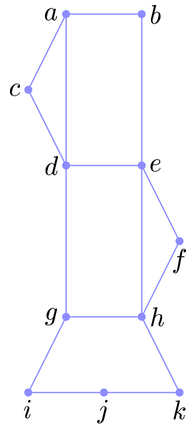

Рисунок 1

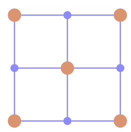

Рисунок 2

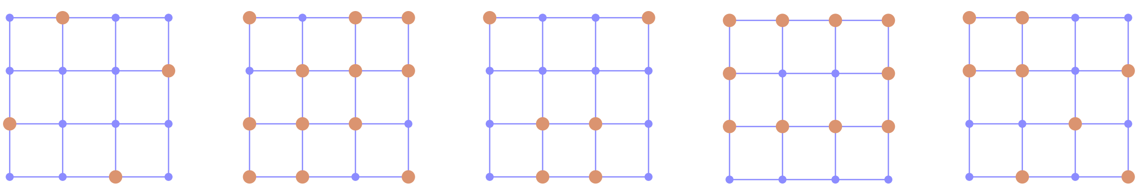

Рисунок 3

Найдём все раскраски для графа рисунка 1. Его вершины обозначены буквами. Присвоим значение 1 буквам, вершины которых покрашены, и 0 — тем, где не покрашена. Рассмотрим следующую систему сравнений, где знаки сравнения (три чёрточки вместо двух черточек привычного знака равенства) указывают, что нас интересует только чётность (два числа сравнимы по модулю 2 в том и только том случае, когда их разность чётна — кратна числу 2):

$$
\begin{cases}
a+b+c+d \equiv 1, \\
b+a+e \equiv 1, \\
c+a+d \equiv 1, \\
d+a+c+e+g \equiv 1, \\
e+b+d+f+h \equiv 1, \\
f+e+h \equiv 1, \\
g+d+h+i \equiv 1, \\
h+e+f+g+k \equiv 1, \\
i+g+j \equiv 1, \\
j+i+k \equiv 1, \\
k+j+h \equiv 1.
\end{cases}
$$

Вы ещё не поняли, какое отношение система сравнений имеет к раскраскам Акулича? Посмотрите на первую строку: число $a+b+c+d$ нечётно либо в случае, когда $a=1$ и среди чисел b, c, d чётное число единиц, либо в случае, когда $a=0$ и среди чисел b, c, d нечётное число единиц. Таким образом, первое сравнение системы выражает для вершины a условие «у каждой покрашенной вершины чётное число покрашенных соседок, а у каждой непокрашенной вершины — нечётное число покрашенных соседок» статьи «Призрак Леонардо».

Аналогична ситуация и для всех остальных строк системы: для каждой вершины графа в составленной нами системе есть соответствующая строка.

Последовательное исключение неизвестных

А теперь — простая, но очень важная идея: **любую систему линейных уравнений можно решить методом Гаусса последовательного исключения неизвестных.** Скептик скажет, что у нас не уравнения, а сравнения по модулю 2. Но это даже упрощает вычисления: для любого целого числа x, очевидно, $2x \equiv 0 \pmod 2$ и $x \equiv -x \pmod 2$.

Начинаем работу. Из первого сравнения выражаем

$$a \equiv b+c+d+1$$

(последний раз напоминаем, что все сравнения по модулю 2). Заменяя во всех других сравнениях (втором, третьем и четвёртом) a на $b+c+d+1$ и упрощая, получаем систему

$$
\begin{cases}
c+d+e\equiv 0,\\
b\equiv 0,\\
b+e+g\equiv 0,\\
e+b+d+f+h\equiv 1,\\
f+e+h\equiv 1,\\
g+d+h+i\equiv 1,\\
h+e+f+g+k\equiv 1,\\
i+g+j\equiv 1,\\
j+i+k\equiv 1,\\
k+j+h\equiv 1.
\end{cases}
$$

Следовательно, $b\equiv 0$ и $c\equiv d+e$; получаем систему восьми сравнений

$$
\begin{cases}
e+g\equiv 0,\\
e+d+f+h\equiv 1,\\
f+e+h\equiv 1,\\
g+d+h+i\equiv 1,\\
h+e+f+g+k\equiv 1,\\
i+g+j\equiv 1,\\
j+i+k\equiv 1,\\
k+j+h\equiv 1.
\end{cases}
$$

Заметьте: для шага метода последовательного исключения неизвестных можно воспользоваться *любым* из сравнений системы; принципиального значения это не имеет. Идея метода в том, что мы из некоторого имеющегося сравнения выражаем любую из входящих в него переменных и, подставляя полученное выражение в остальные сравнения, уменьшаем тем самым количество неизвестных и сравнений; при этом могут образовываться сравнения вида $0\equiv 0$, которые сразу отбрасываем.

Если бы образовалось сравнение $0\equiv 1$, то из исходной системы сравнений мы получили бы противоречие. Такие системы называют несовместными — они не имеют ни одного решения. (Вскоре мы докажем, что для любого графа система, соответствующая раскраскам Акулича, совместна.)

Продолжим вычисления. Поскольку $e\equiv g$, получаем сами понимаете какую систему семи сравнений.

Обратите внимание: переменные a, b, c и e уже исчезли, сравнений тоже стало на четыре меньше. А теперь самостоятельно повторите наши вычисления. Поскольку вариантов, какие именно переменные выражать на очередном шаге, довольно много, договоримся: сначала выразите d, затем f, i, k, h и g.

Посчитали? Вот ответ: величина j — свободная переменная: она может принимать любое из двух возможных значений 0 и 1, а остальные переменные выражаются по формулам таблицы, в нижних двух строках которой приведены оба решения системы.

j	$g \equiv 1$	$h \equiv j$	$k \equiv 1$	$i \equiv j$	$f \equiv j$	$d \equiv 0$	$e \equiv 1$	$c \equiv 1$	$b \equiv 0$	$a \equiv 0$
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

На рисунках 4 и 5 изображены соответствующие раскраски. В общем случае получаем 2^k раскрасок, где k — число свободных переменных; например, в случае $k = 0$ система имеет единственное решение.

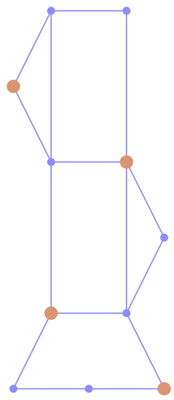

Рисунок 4

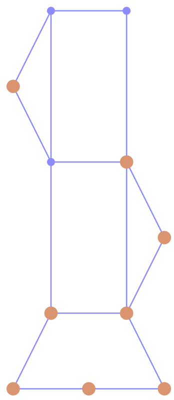

Рисунок 5

Упражнения

1. *Составьте и решите аналогичные системы для графа рисунка а) 2; б) 3.*

2. *Нарисуйте какой-нибудь граф, составьте систему сравнений Акулича, решите её и нарисуйте все возможные раскраски Акулича.*

3 (М665*). *Световое табло состоит из нескольких ламп, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора ламп (для каждой кнопки — своего). Вначале лампы не горят.*
а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло,— степень двойки.
б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из mn лампочек, расположенных в форме прямоугольника размером $m \times n$, если кнопками можно переключить как любой горизонтальный, так и любой вертикальный ряд ламп?

4 (М205*). *24 студента решали 25 задач. Преподаватель составил таблицу размером 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Докажите, что*
а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решил чётное число (в частности, может быть, нуль) из отмеченных задач;
б) можно отметить некоторые из задач знаком «$+$», а некоторые из остальных — знаком «$-$» и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «$+$» и «$-$».

Сумма степеней вершин

Доказательство того, что при решении системы мы не можем прийти к противоречию — сравнению $0 \equiv 1$, основано на следующем важном свойстве графов.

Лемма. *Сумма степеней всех вершин графа чётна.*

Доказательство. Разрезав все рёбра графа пополам, видим, что удвоенное число рёбер равно сумме степеней всех вершин графа: например, для графа рисунка 1 получаем равенство

$$2 \cdot 15 = 3 + 2 + 2 + 4 + 4 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 2.$$

Следовательно, интересующая нас сумма чётна; лемма доказана.

Совместность системы

Теперь докажем, что в процессе решения системы, соответствующей раскраскам Акулича, не получится сравнение $0 \equiv 1 \pmod 2$.

Если мы складываем несколько сравнений системы (а ничего другого по сути мы делать не можем: все операции исключения неизвестных, как легко сообразить, являются по сути операциями почленного сложения — так уж замечательно устроены сравнения по модулю 2), то для получения в правой части единицы мы должны сложить нечётное число сравнений.

Рассмотрим подграф исходного графа, вершины которого — «центры» складываемых сравнений. Для получения в левой части нулевого коэффициента при каждой из соответствующих переменных степени всех вершин рассматриваемого подграфа должны быть нечётны. Но в силу леммы не существует ни одного графа с нечётным числом вершин, степени которых все нечётны.

Таким образом, для математика ответы на первый, третий, четвёртый и шестой вопросы статьи Акулича кратко можно выразить тремя фразами: его раскраски — это решения систем линейных уравнений; система уравнений над полем вычетов по модулю два либо имеет 2^k решений, где k — число свободных неизвестных, либо несовместна; система совместна вследстие того, что в графе, степени всех вершин которого нечётные, количество вершин обязательно чётное.

Упражнение 5. *Рассмотрим граф. Первоначально все его вершины покрашены в белый цвет. Рассмотрим операции следующего вида: выбираем любую вершину и одновременно перекрашиваем в противоположный цвет её саму и всех её соседок. Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно перекрасить все врешины графа в чёрный цвет.*

Разность двух раскрасок Акулича

Любая система линейных уравнений обладает тем свойством, что если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — её решения, то $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$ — решение системы, которая получается из данной нам системы заменой всех чисел правой части на нули (докажите!). В нашем случае это сответствует тому, что для любых двух разных раскрасок Акулича при их наложении (по принципу «дважды красить — то же самое, что ни разу не красить») получается раскраска, в которой каждая окрашенная вершина соседствует с нечётным числом окрашенных, а каждая неокрашенная — с чётным числом окрашенных.

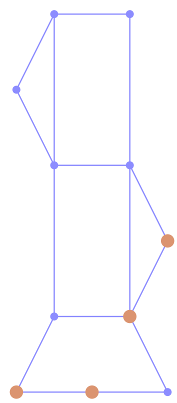

Рисунок 6

Например, вычитая из раскраски рисунка 5 раскраску рисунка 4, получаем раскраску рисунка 6.

Упражнения

6. *На рисунке 7 изображены (с точностью до поворотов и осевых симметрий) все возможные разности для раскрасок упражнения 1 б), кроме той, в которой нет ни одной покрашенной вершины. Убедитесь в этом.*

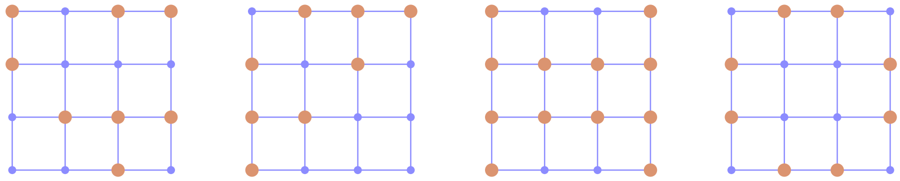

Рисунок 7

7. *Количество раскрасок Акулича равно количеству раскрасок, в которых у каждой покрашенной вершины нечётное число покрашенных соседок, а у каждой непокрашенной вершины — чётное число покрашенных соседок. Докажите это.*

Без систем уравнений

Докажем без использования систем уравнений существование для любого графа хотя бы одной раскраски Акулича. Рассуждаем по индукции. Для графа с одной вершиной утверждение очевидно: достаточно её покрасить.

Предположим, что раскраска Акулича существует для любого графа с n вершинами, и рассмотрим граф с вершинами A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}. Отбросив некоторую вершину A_k, получим граф с n вершинами. Для него существует хотя бы одна раскраска Акулича. Если в некоторой такой раскраске с вершиной A_k связано нечётное число покрашенных вершин, то искомая раскраска Акулича для графа с $n+1$ вершинами построена.

Осталось разобрать случай, когда для каждой вершины A_k, где $1 \leqslant k \leqslant n+1$, мы нашли такую раскраску Акулича C_k графа на остальных n вершинах, что A_k соединена с чётным числом покрашенных вершин. Если n нечётно, то искомую раскраску получаем, суммируя $n+1$ таких раскрасок C_1, C_2, ..., C_n, C_{n+1} (суммируем по модулю 2, то есть красим те и только те вершины, которые оказались окрашены в нечётном числе из рассматриваемых $n+1$ раскрасок). (Подумайте, почему!)

Если же n чётно, то в силу леммы о сумме степеней вершин существует хотя бы одна вершина A_k чётной степени. Искомую раскраску получаем, складывая раскраску, в которой A_k покрашена, а остальные вершины не покрашены, с раскрасками, построенными для её соседок. (Опять-таки подумайте, почему!)

Пятый вопрос Акулича

История не повторяется — это историки повторяют друг друга.

Рассмотрим граф, вершины которого — центры клеток прямоугольника размером $m \times n$, а соседними считаем центры клеток, имеющих общую сторону. Сколько для него существует раскрасок Акулича, выяснить непросто. Пятый вопрос статьи «Признак Леонардо» звучит так: «Существует ли такое m, что для любого n раскраска единственна?»

Ответ отрицательный. Более того, для любого m существует такое n, что количество раскрасок равно 2^m. Более того, для каждого данного m множество таких n бесконечно!

Чтобы это доказать, раскрасим m клеток крайнего левого столбца произвольным образом. Очевидно, условие Акулича «у каждой покрашенной вершины чётное число покрашенных соседок, а у каждой непокрашенной вершины — нечётное число покрашенных соседок» однозначно определяет второй столбец, первый и второй столбцы определяют третий и так далее.

Например, для $m = 2$ дело обстоит так:

a	$a+b+1$	$a+1$	0	a	$a+b+1$	$a+1$	0	$\ldots$
b	$a+b+1$	$b+1$	0	b	$a+b+1$	$b+1$	0	$\ldots$

При $m = 3$ — так:

a	$a+b+1$	$a+c+1$	$b+c+1$	$c+1$	0	c	$b+c+1$	$\ldots$
b	$a+b+c+1$	0	$a+b+c$	$b+1$	0	b	$a+b+c+1$	$\ldots$
c	$b+c+1$	$a+c+1$	$a+b+1$	$a+1$	0	a	$a+b+1$	$\ldots$

А при $m = 4$ — так:

a	$a+b+1$	$a+c+1$	$b+c+d+1$	0	$b+c+d$	$a+c+1$	$a+b+1$	$\ldots$
b	$a+b+c+1$	d	$a+b+d+1$	0	$a+b+d$	$d+1$	$a+b+c$	$\ldots$
c	$b+c+d+1$	a	$a+c+d+1$	0	$a+c+d$	$a+1$	$b+c+d$	$\ldots$
d	$c+d+1$	$b+d+1$	$a+b+c+1$	0	$a+b+c$	$b+d+1$	$c+d+1$	$\ldots$

Доказать, что при любом m в таблице бесконечно много столбцов, состоящих только из нулей (это и означает, что для соответствующих n количество раскрасок Акулича равно 2^m), довольно просто. Достаточно рассмотреть всевозможные пары столбцов (B, C). По каждой такой паре однозначно строится следующий столбец D. Таким образом, задано отображение $(B, C) \to (C, D)$. Поскольку множество пар столбцов конечно, то с какой бы пары столбцов мы ни начали, рано или поздно произойдёт зацикливание.

Возникший цикл не может обладать хвостом (предпериодом) вроде того, что изображён на рисунке 8. Дело в том, что пара столбцов (B, C) однозначно определяет не только следующий за ними столбец D, но и предшествующий им столбец A: ситуация $A_1 \neq A_2$ невозможна!

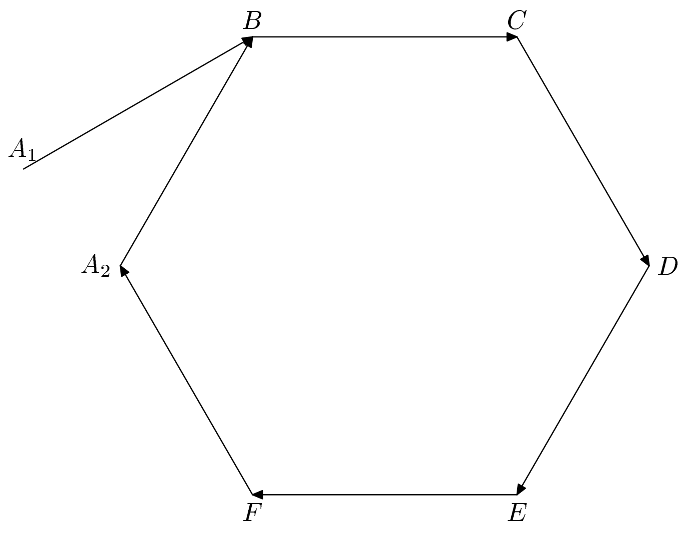

Рисунок 8

Осталось вспомнить, что к рассматриваемой нами таблице слева с соблюдением правила «у каждой покрашенной вершины чётное число покрашенных соседок, а у каждой непокрашенной — нечётное» можно приписать только столбей из одних нулей. Значит, когда произойдёт зацикливание, мы вновь увидим нулевой столбец.

Таким образом, для математика ответ на пятый вопрос статьи Акулича таков: любое взаимнооднозначное отображение конечного множества в себя (короче говоря, перестановка) разлагается на циклы, и среди этих циклов не может быть ни одного цикла с хвостом.

Упражнения

8. *Постройте такого рода таблицу для а) $n=5$; б) $n=6$.*

9. *Существует бесконечно много чисел Фибоначчи, десятичная запись которых оканчивается на шесть нулей. Докажите это.*

10. *Нужно построить из одинаковых по размеру белых и чёрных кубиков сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый чёрный кубик башни граничил с чётным числом белых, а каждый белый — с нечётным числом чёрных. Докажите, что для любого нижнего слоя можно построить такую башню конечной высоты.*

Второй вопрос Акулича

При $m=n\leqslant 28$ количество раскрасок Акулича, как он проверил при помощи компьютера, является не только степенью числа 2, но и степенью числа 4 (то есть соответствующая размерность k чётна). Причин для такого явления не видно, однако и отвергать с порога его наблюдение не будем. Любящие компьютер читатели могут заняться составлением соответствующих таблиц и вычислением k для других значений $m=n$. Интересно, встретится ли нечётное значение k? И какова ситуация для других графов?

Плюсы и минусы

На II Всесоюзной олимпиаде (1968 год) была предложена следующая задача. *В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены плюсы и минусы, как показано на рисунке 9. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажем, что сколько ни проводи таких перемен, таблицу из одних плюсов не получишь.*

+	−	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рисунок 9

Решение — на рисунке 10: каждая прямая, параллельная сторонам или диагоналям квадрата, пересекает чётное число из восьми зелёных клеток. Поэтому чётность количества минусов, стоящих в этих клетках, при рассматриваемых операциях не меняется.

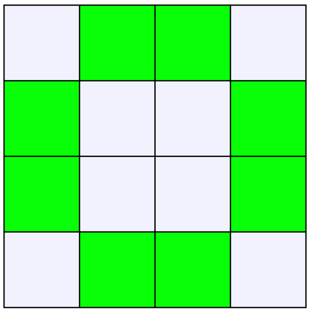

Рисунок 10

Упражнения

11. *В клетках квадратной таблицы* 8×8 *расставлены плюсы, за исключением одной не угловой клетки, в которой стоит минус. Разрешено одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). а) Докажите, что сколько ни проводи таких перемен, таблица из одних плюсов не получится.*
б) Сколько разных расстановок знаков можно получить из одной данной расстановки при помощи рассматриваемых операций?

12 (М109). *а) В вершине* A_1 *правильного 12-угольника* $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ *стоит знак минус, а в остальных — плюсы. Разрешено одновременно поменять знак на противоположный в любых последовательных а) шести; б) четырёх; в) трёх вершинах многоугольника. Докажите, что при помощи таких операций нельзя добиться того, чтобы в вершине* A_2 *оказался знак минус, а в остальных вершинах — плюсы.*

13. *На пульте находятся 100 светящихся кнопок, расположенных в виде квадрата* 10×10. *Табло устроено так, что при нажатии на любую кнопку она и все унопки одного с ней ряда и все кнопки одного с ней столбца меняют своё состояние: светившиеся гаснут, а не светившиеся загораются. Какое наименьшее число кнопок нужно нажать, чтобы все копки оказались погашенными, если первоначально все светились?*

Лампы на табло

Итак, избавиться от одного минуса внутри «зелёного множества» невозможно. А если нет ни одного «зелёного» множества?

Только давайте от прямоугольной таблицы и плюсов-минусов перейдём в антураж задачи Московской олимпиады 1995 года. Там речь шла о лампах и кнопках. Каждая кнопка соединена с одной или несколькими лампами. Нажатие на кнопку меняет состояние лампы, с которой она соединена. Спрашивалось, всегда ли можно погасить все лампы, нажимая на кнопки? Оказывается, если нет ни одного «зелёного множества», то всегда!

Теорема. *Если для любого непустого множества ламп существует кнопка, соединённая с нечётным числом ламп из этого набора, то при помощи нажатий на кнопки можно погасить все лампы.*

Доказательство. Результат нажатия нескольких кнопок не зависит от порядка их нажатия. Применим индукцию по количеству ламп.

Сначала, как положено, база индукции: пусть лампа одна. Поскольку должна существовать кнопка, соединённая с нечётным числом ламп, то некоторая кнопка управляет в точности одной этой лампой.

Теперь — индукционный переход. Пусть утверждение доказано для n ламп и любой удовлетворяющей условиям теоремы системы кнопок. Рассмотрим лампы $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$, некоторые из которых горят. Временно исключим из рассмотрения некоторую лампу A_k, где $1 \leqslant k \leqslant n+1$. По предположению индукции, можно при помощи некоторого набора кнопок погасить все горящие лампы из n рассматриваемых нами сейчас ламп. Если после этих нажатий на кнопки лампа A_k не горит, то мы добились своего.

Значит, осталось рассмотреть ситуацию, когда лампа A_k светится, а все остальные — нет. Рассмотрим $m \neq k$, где $1 \leqslant m \leqslant n+1$. В силу предположения индукции, все лампы, кроме A_m, можно погасить. Если при этом погаснет и A_m, то дело сделано.

Остался случай, когда A_m горит, а остальные лампы — нет. К нему мы пришли из ситуации, когда горела только лампа A_k. Таким образом, при помощи имеющегося набора кнопок мы для любых $m \neq k$ можем при помощи имеющегося набора кнопок гасить лампу A_k и зажигать A_m, не меняя состояния других ламп. Рассмотрим теперь какую-нибудь кнопку K, соединённую с нечётным числом ламп, и выберем какую-нибудь лампу L, соединённую с K. Погасим все лампы, кроме L. Нажмём кнопку K. Теперь горит чётное число ламп; погасим их парами.

Поскольку $d \equiv f + g + h + 1$ и $f \equiv g + h + 1$, то

$$\begin{cases} g + h + i \equiv 1 \pmod 2, \\ g + k \equiv 0 \pmod 2, \\ i + g + j \equiv 1 \pmod 2, \\ j + i + k \equiv 1 \pmod 2, \\ k + j + h \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Далее, $i \equiv g + h + 1$ и $k \equiv g$, следовательно,

$$\begin{cases} h + j \equiv 0 \pmod 2, \\ j + h \equiv 0 \pmod 2, \\ g + j + h \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Первые два сравнения равносильны, поэтому $h \equiv j$ и $g \equiv 1$. Величина j — свободная переменные; она может принимать любое из двух возможных значений 0 и 1, а остальные переменные выражаются по формулам

$$\begin{cases} g \equiv 1, \\ h \equiv j, \\ k \equiv g \equiv 1 \\ i \equiv g + h + 1 \equiv j, \\ f \equiv g + h + 1 \equiv j, \\ d \equiv f + g + h + 1 \equiv 0, \\ e \equiv g \equiv 1, \\ c \equiv d + e \equiv 1, \\ b \equiv 0, \\ a \equiv b + c + d + 1 \equiv 0. \end{cases}$$