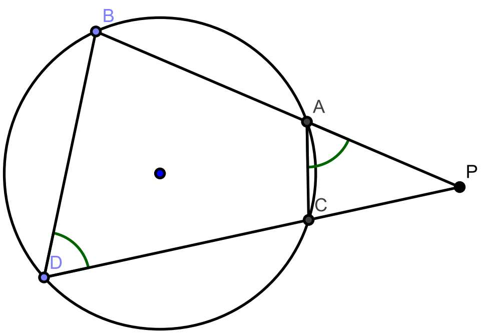
Первые шаги.

Решение содержательной геометрической задачи подобно восхождению на вершину – требует терпения и снаряжения. Так и простую геометрическую задачу можно решить одним прыжком, снаскоку.Сложную задачу можно решать эдакими перебежками с привалами. Привалами будут служить простенькие, взятые по отдельности, задачи. И так, шаг за шагом можно подняться на вершину.

Первая наша маленькая геометрическая вершина покорилась ещё Эвклиду, а нынче стала достоянием школьных учебников и задачников.

Теорема №1. Пусть дана окружность и точка P, лежащая вне окружности. Через точку P проводятся две произвольные прямые, пересекающие окружность в точках A, B и C, D. Тогда

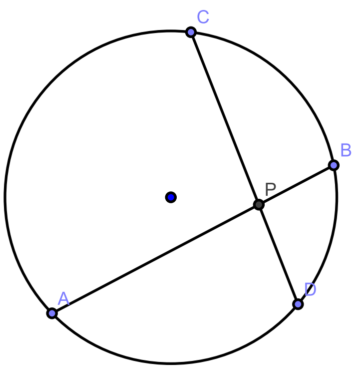
$$PA \times PB = PC \times PD.$$



Доказательство. Само тождество подсказывает нам, что где-то зарыто подобие, как оказывается, неглубоко. Итак, заметим, что $\Delta APC \sim \Delta PDB$. Действительно, $\angle PAC + \angle BAC = 180°$(смежные), $\angle BDC + \angle BAC = 180°$(сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника)$\Rightarrow$ $\angle CAP = \angle BDP$, а угол при вершине P для обоих треугольников общий, откуда заключаем, что треугольники подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PD} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Интересно отметить, что если точка P лежит внутри окружности, то



теорема верна.

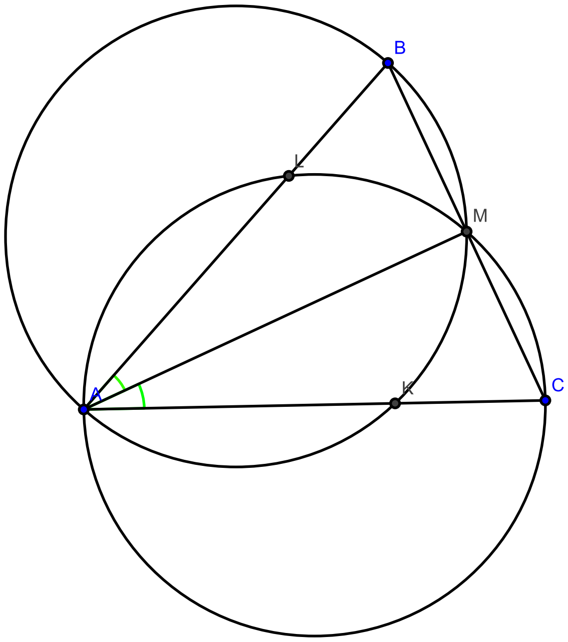
Упр1. Докажите это.

Отметим также следующий важный частный случай теоремы. Допустим, что точки, например, A и B совпали, тогда теорема будет гласить, что $PA \cdot PA = PA^2 = PC \cdot PD$, т.е. квадрат длины касательной, проведённой из данной точки, равен произведению длин внешней части секущей на длину всей секущей, проведённой из этой же точки. При этом секущую можно выбирать *любую*!

И что спрашивается, разве с такого маленького холмика можно подняться куда-то выше?!

Для начала поглядим с холмика, осмотримся. Посмотрим, например, на Север, а там...

Задача №1. (Санкт-Петербургская олимпиада. Отборочный тур. 9 класс. 1996 год. Берлов С.) В ΔABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около ΔABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около ΔAMC, пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.



`Решение`. Ага, здесь мы видим аж целых две окружности и просят доказать, что $KC = BL$. А как же эти точки связаны с окружностями? Точно! Ведь эти отрезки являются внешними частями секущих. Итак, запишем теорему о секущих для товчки C и окружности, описанной около треугольника ABM:

$$CK \cdot CA = CM \cdot CB.$$

Анологично, получим теперь, что

$$BL \cdot BA = BM \cdot BC.$$

Поделив, первое тождество на второе, получим:

$$\frac{KC}{BL} = \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA}{BA},$$

т.е. для того, чтобы показать, что $KC = BL$ осталось доказать

Упр 2. В треугольники ABC проведена биссектриса AM. Докажите, что $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$.

Взлянув с холмика назад, в прошлое можно углядеть классическую

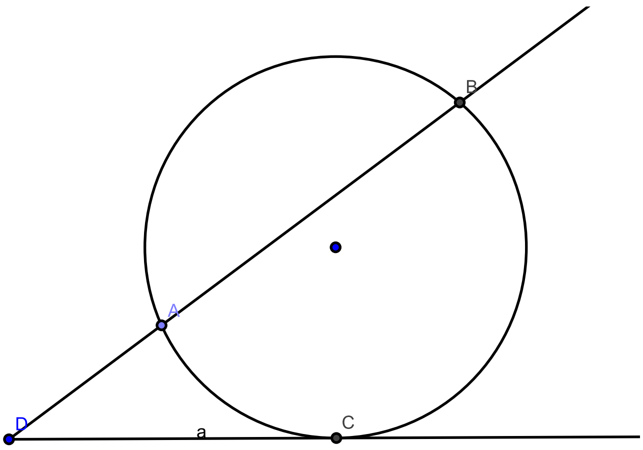
Задача №2. Постройте[1] окружность, проходящую через две данные точки, которая касалась бы данной

а) прямой;

б) окружности.

[1] во всех задачах на построение нужно использовать циркуль и линейку, если неоговорено противное.

Решение.



Как водится в задачах на построение, начнём с анализа. Допустим, что нужная окружность построена, и D – точка пересечения данной прямой a и прямой, содержащей данные точки A и B. В таком случае по нашей основной теореме №1 получаем, что

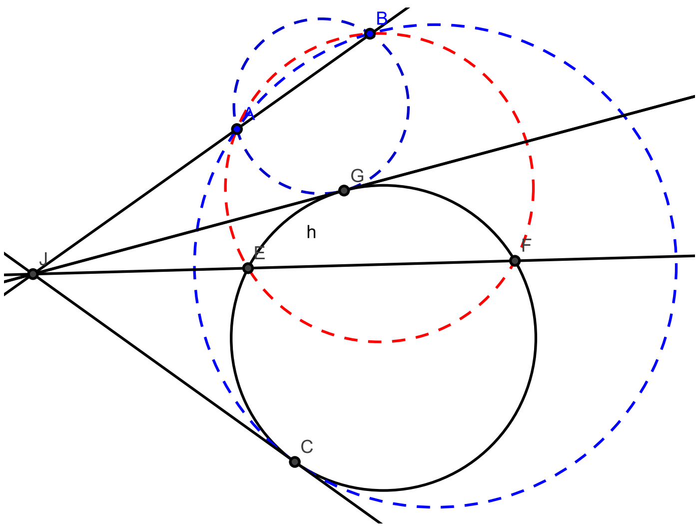
$$DA \times DB = DC^2,$$

где C – точка касания искомой окружности и данной прямой a. Но ведь отрезки DA и DB нам по сути даны из условия, следовательно, осталось выполнить

Упр №3. Даны отрезки a и b, постройте отрезок $c = \sqrt{a \cdot b}$.

Так найдём третью точку окружности. Осталось построить окружность по трём точкам и доказать, что такая окружность действительно касается прямой a. Допустим, что построенная окружность пересекает данную прямую a в двух точках – C и E, тогда по теореме №1 $DC = \frac{DA \cdot DB}{DE}$, с другой стороны мы строили C таким образом, что $DC^2 = DA \cdot DB$. Из сопоставления последних двух равенств находим, что $DE = DC$, т.е. точки совпадают, значит окружность касается прямой a.

Пункт б) решается похитрее, но основная идея таже.



Итак, даны две точки A,B и окружность h(чёрная на картинке). Идея состоит в следующем: через точки A и B проводим произвольную окружность, пересекающую данную в двух точках, которые обозначим E и F. Пусть J – общая точка прямых EF и AB (случай, если прямые не пересекаются необходимо разобрать отдельно). Теперь действуем похожим образом, как в пункте а), проводим из точки J касательные к исходной окружности h.

Упр №4. Постройте из данной точки касательную к данной окружности.

Обозначим через G и C точки касания, далее строим две окружности, проходящие через точки A, B, G – первая и через A, B, C – вторая (на рисунке эти окружности проведены синим пунктиром). Покажем, что построенные окружности действительно касаются данной окружности h. Докажем, это, например для первой окружности. Запишем нащу основную теорему №1 для точки J, окружности h, секущей JF и касательной JG:

$$JG^2 = JE \cdot JF \tag{$*$}$$

Теперь используем теорему для вспомагательной окружности (красной), опять же точки J, секущих JB и JF:

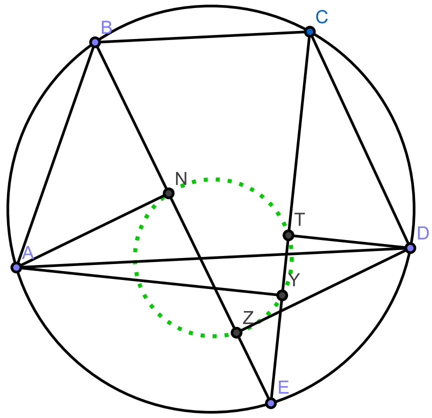
$$JA \cdot JB = JE \cdot JF \tag{$**$}$$

Сопоставляя формулы (*) и (**), видим, что $JG^2 = JA \cdot JB$. А коли выполнено такое тождество, то окружность, проходящая через точки A, B и G, касается прямой JG (см. решение пункта а)). Значит окружность, проходящая через точки A, B и C, и окружность h касаются прямой JG в точке G, следовательно они касаются. Анологично для второй окружности.

На самом деле, при решении последней задачи было установлен критерий принадлежности четырёх точек одной окружности, т.е. верна теорема обратная к теореме №1. Сей факт бывает тоже полезен.

Задача №3. (Олимпиада 239 школы, Санкт-Петербург 1999год. Берлов С.)

$ABCD$ – равнобедренная трапеция ($BC||AD$), E – точка дуги AD описанной окружности. Из точек A и D опустили перпендикуляры на прямые BE и CE. Докажите, что основания перпендикуляров лежат на одной окружности.



Решение. Сразу так и не поймёшь где наш критерий-то искать. Тут ведь столко равных углов, сразу хотчется все поотмечать. Но не будем спешить. В задаче просят показать, что точки N, T, Y, Z лежат на одной окружности. Давайте на секунду представим, что это так, тогда видим, что отрезки ET и EN являются секущими. Другими словами, согласно теореме обратной к теореме №1 достаточно показать, что

$$EN \cdot EZ = ET \cdot EY$$

А это не так-то и трудно. Действительно,

$$EN \cdot EZ = EA\cos(\angle AEB) \cdot ED\cos(\angle DEZ) = EA \cdot \cos(\angle AEY) \cdot ED\cos(\angle TED)$$

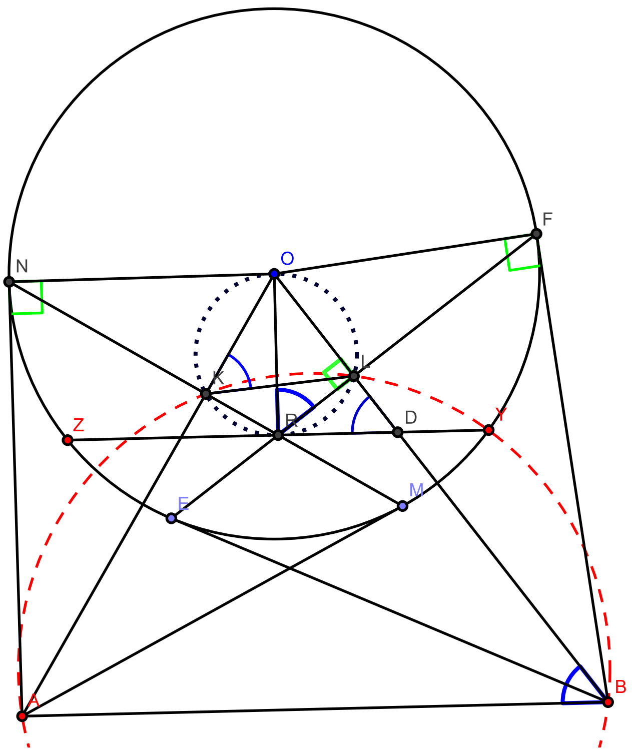
Здесь мы использовали то, что $\angle AEB = \angle CED$. Это следует из того, что $AD||BC$. Итого, требуемое равнесто доказано, значит точки N, T, Y, Z лежат на одной окружности.

Таким же приёмом решается

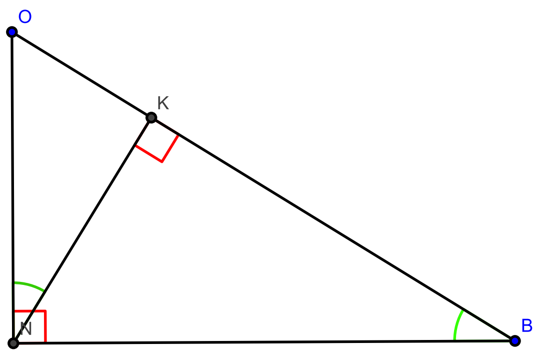
Упр №5.(Геометрическая олимпиада имени И.Ф. Шарыгина. Заочный тур. 2007-2008 учебный год. Заславский А.) Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке I. Докажите, что проекции точек B и D на прямые IA и IC лежат на одной окружности.

Теперь-то мы готовы доказать следующую жемчужину геометрии

Задача №4. Через середину R хорды ZY проводятся две хорды NM и EF. A и B – точки пересечения касательных к окружности, проведённых в точках N и M, E и F. Докажите, что $ZY||AB$.



Решение. Здесь на полную катушку работают свойства касательных к окружности. Так замечаем, что $AN \perp ON$(касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания),$AO \perp NM$(это следует, например, из того, что треугольники ANM и NOM равнобедренные с общим основанием NM). Итак, получили прямоугольный треугольник ANO



$\Delta ONK \sim \Delta AON(\angle O$ – общий, $\angle ANO = \angle NKO)\Rightarrow \frac{ON}{OA} = \frac{OK}{ON} \Rightarrow ON^2 = OK \times OA$. Точно также, рассматривая прямоугольный треугольник OFB, можно установить, что $OF^2 = OL \times OB$. Но ведь $ON = OF$, ибо радиусы, а по сему заключаем, что

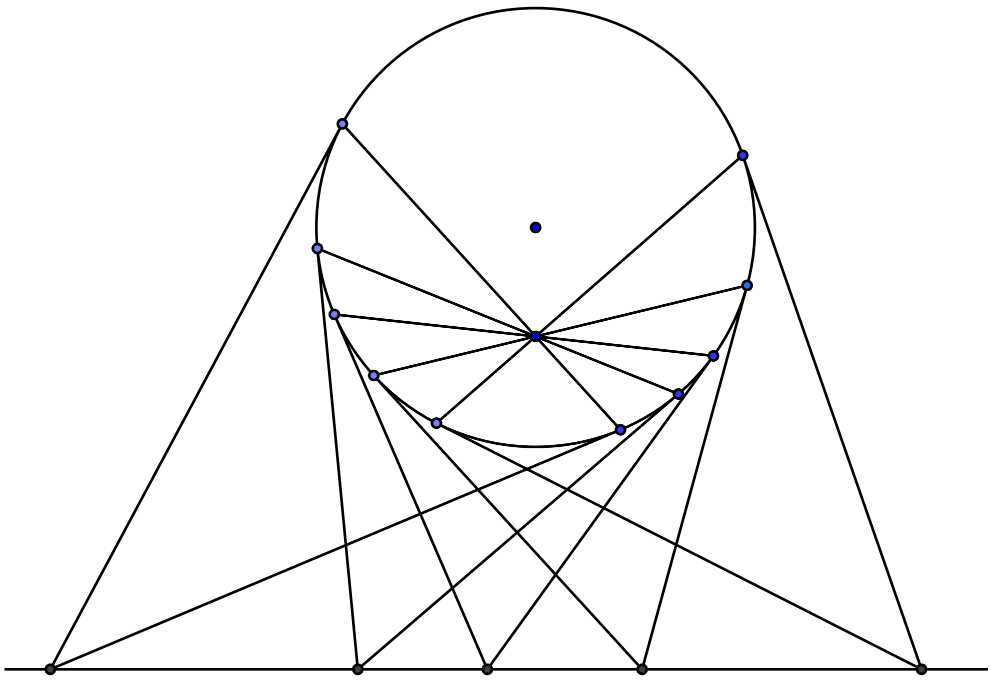
$$OK \times OA = OL \times OB.$$

А это же в чистом виде наш критерий принадлежности четырёх точек одной окружности(OA, OB – секущие !). Поэтому точки A, K, L и B действительно лежат на одной окружности! Мало этого, так оказывается ведь, что точки K, O, L и R лежат на одной окружности ($\angle OKR + \angle OLR = 180°$).

Упр 6. Докажите, что если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то вокруг него можно описать окружность. Покажите, что обратное утверждение также верно.

Покажем, что $\angle OBA = \angle ODR$. На самом деле, из вписанности $KOLR$ следует, что $\angle OKL = \angle ORL$(оба опираются на дугу OL), тогда получаем : $\angle LDR = 90^\circ - \angle LRD = \angle ORL$(диаметр OR проходит через середину хорды $ZY \Rightarrow OR \perp ZY$), но $\angle OBA = 180^\circ - \angle AKL = \angle OKL$. Итак, получили, что $\angle ODR = \angle OBA \Rightarrow AB||ZY$. Фух... можно выдохнуть.

Если присмотреться, то в этой задаче было доказано совершенно феноменальное утверждение. Зафиксируем точку внутри окружности, через неё проводим всевозможные хорды, тогда все точки, образующиеся в результате пересечения касательных, проведённых через концы каждой из хорд, лежат на одной прямой.

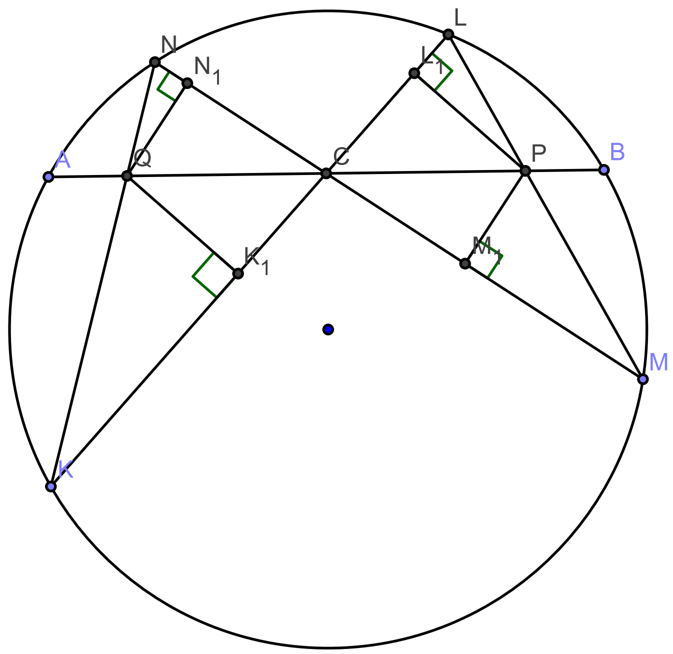


Верно и обратное. Таким образом, каждой точке внутри окружности можно сопоставить прямую, а каждой прямой точку внутри окружности. Такое преобразовние называют *полярным.*

Есть ещё один классический пример, который заслуживает упоминания

Задача о бабочке.

Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN(точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезки KN и ML пересекает AB в точках Q и P. Докажите, что $PC = QC$.



Решение.

Тут, конечно же, одной лишь нашей теоремой №1 не обойтись. Итак, опустим из точек Q и P перепендикуляры QN_1 и QK_1, PL_1 и PM_1 на прямые KL и MN соответственно. Тогда получаем

$$\frac{QC}{PC} = \frac{QK_1}{PL_1} = \frac{QN_1}{PM_1}. \qquad (\star)$$

Это следует из подобия : $\Delta QN_1C \sim \Delta PM_1C$, $\Delta QK_1C \sim \Delta PL_1C$. Из последнего тождества $\star$ заключаем, что

$$\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK_1 \times QN_1}{PL_1 \times PM_1}. \qquad (\star\star)$$

Теперь из того, что : $\Delta QNN_1 \sim \Delta PLL_1$, $\Delta K_1KQ \sim \Delta M_1MP$ находим, что $\frac{QN_1}{PL_1} = \frac{QN}{PL}$ и $\frac{QK_1}{PM_1} = \frac{QK}{PM}$. Подставляя в $\star\star$, видим:

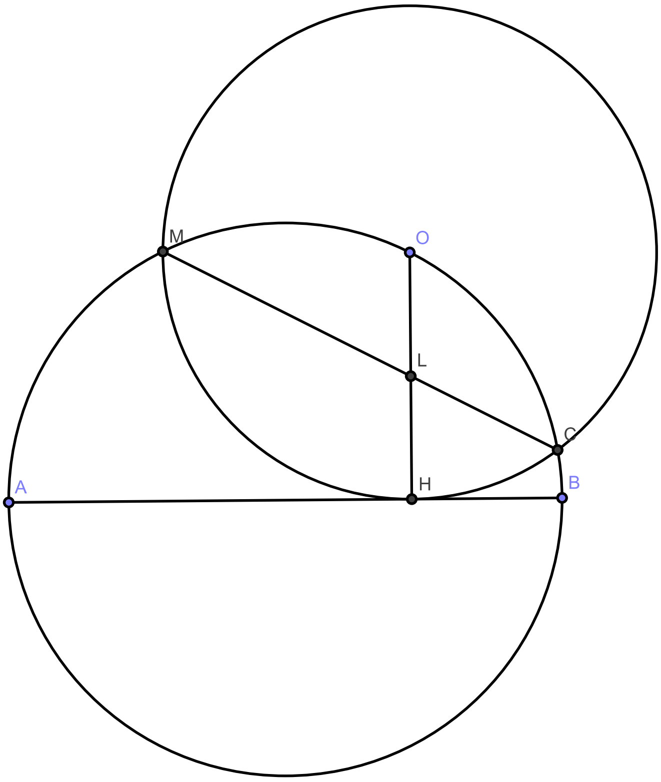
$$\frac{QC^2}{PC^2} = \frac{QK}{PM} \cdot \frac{QN}{PL} = \frac{AQ \cdot QB}{BP \cdot AP} = \frac{(AC - QC) \cdot (AC + QC)}{(AC - PC) \cdot (AC + PC)} = \frac{AC^2 - QC^2}{AC^2 - PC^2}.$$

Здесь использовали теорему №1(во втором равенстве) и то, что C – середина отрезка AB. Из последней цепочки получаем требуемое равенство: $QC = PC$.

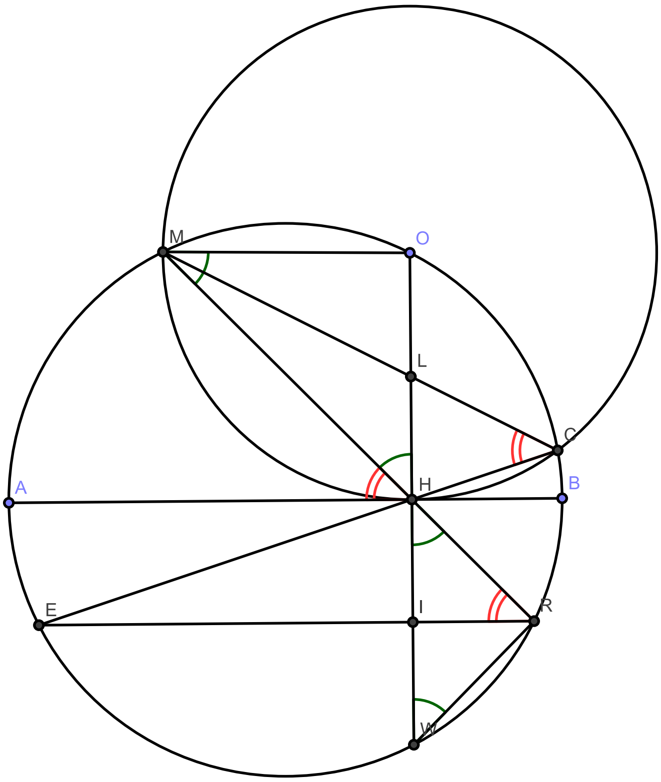
Безусловно задача о бабочки является одной из самых красивых и популярных задач. Тем интереснее, что «задача о бабочке» сама может служить своего рода кипирчиком для решения других задач.

Задача №5(«Задачник» Кванта, M1827).

Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB. Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.



`Решение.` Продлим CH и MH до пересечения с окружностью.



Заметим, что $\angle OMH = \angle MHO$, ибо треугольник MOH равнобедренный ($OM = OH$ - радиусы), $\angle OHM = \angle RHW$, как вертикальные, да ещё и $\angle RMO = \angle OWR$, потому что опираются на дугу OR. Поэтому треугольник HRW также равнобедренный. С другой стороны $\angle MCH = \angle MHA$, так оба опираются на дугу MH, а $\angle MCE = \angle MRE$, так как опираются на дугу ME, откуда заключаем, что $\angle MHA = \angle HRE \Rightarrow AB||ER$. Но ведь радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, т.е. $OH \perp AB$, но как, мы только что показали, $AB||ER \Rightarrow ER \perp OW$. Другими словами, IR является высотой в равнобедренном треугольнике HRW, а по сему совпадает с медианой $\Rightarrow HI = IW$. Осталось заметить, что H является серединой хорды $OW(AB$ – диаметр, $AB \perp OW)$, и применить «задачу о бабочке».

Упр. №7. (С. Берлов) Дан остроугольный треугольник ABC, H – ортоцентр (точка пересечения высот), D – середина AD. Если прямая, проходящая через H и перпендикулярная отрезку HD пересекает прямые AB и BC в точках E и F, то $HE = HF$.

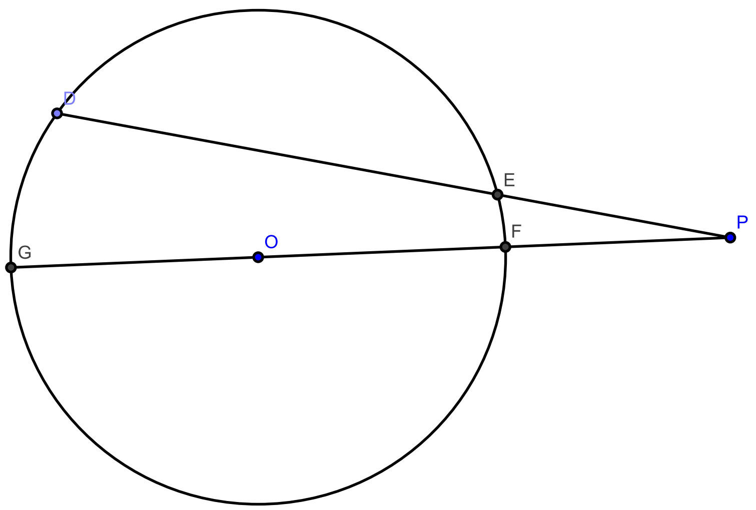
Упр. №8. (Харуки.) Даны две непересекающиеся хорды AB и CD окружности и произвольная точка P дуги AB, которая не содержит точки C и D. Пусть E и F – точки пересечения хорд PC и AB, PD и AB, соответственно. Докажите, что значение выражения $\frac{AE \cdot BF}{EF}$ не зависит от положения точки P.

Упр. №9. Докажите теорему «о бабочке», используя предыдущее упражнение (упр. №8.)

Упр. №10. (обобщение задачи о бабочке. И.Ф. Шарыгин.) На окружности дана хорда AB, на ней – точки M и N, причём $AM = BN$. Через точки M и N проведены хорды PQ и RS соответственно. Прямые QS и RP пересекают AB в точках K и L. Покажите, что $AK = BL$.

Степень точки.

В предыдущем параграфе мы видели на какие чудеса способна Теорема №1. Эта теорема устанавливает, что произведение длин внешней части секущей на длину всей секущей не зависит от выбора секущей. Так давайте посчитаем чему же равно это произведение. Итак, возьмём опять-таки точку P вне окружности и проведём через неё первую прямую произвольно, а вторую, проходящую через центр.



Введём некоторые обозначения: $OP = d, OE = R$. Тогда по Теореме №1 получим, что $PE \cdot PD = PF \cdot PG = (d - R) \cdot (d + R) = d^2 - R^2$.

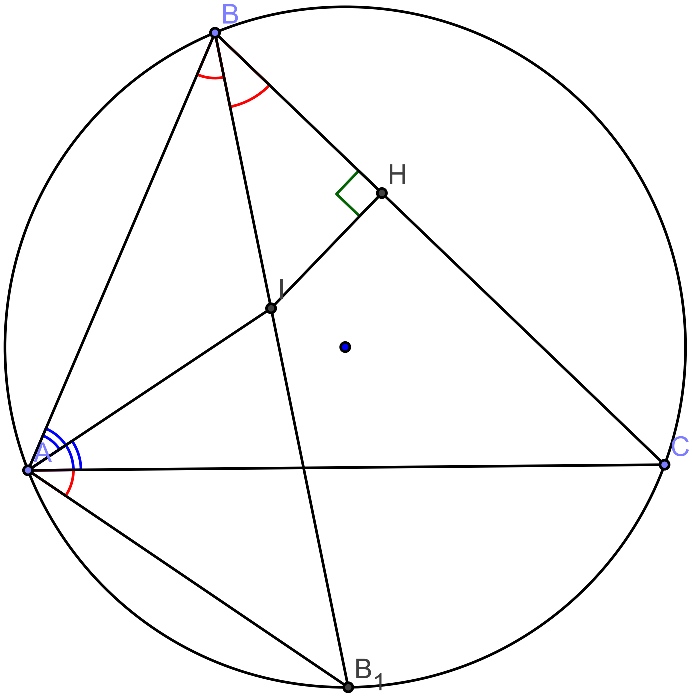
Для любой окружности радиуса R и любой точки P, отстоящей на расстояние d от центра, величину

$$d^2 - R^2$$

называют *степенью* точки относительно данной окружности. Степень точки положительна, если точка находится вне окружности, отрицательна, если точка находится внутри окружности. Оказывается понятие степени точки, которое проистекает из всё той же теоремы №1, архиполезно при решения ряда задач.

Теорема Эйлера. Пусть радиус описанной окружности равен R, а радиус вписанной – r, расстояние между цетрами впианной и описанной окружностей равно d. Тогда имеет место тождество

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$



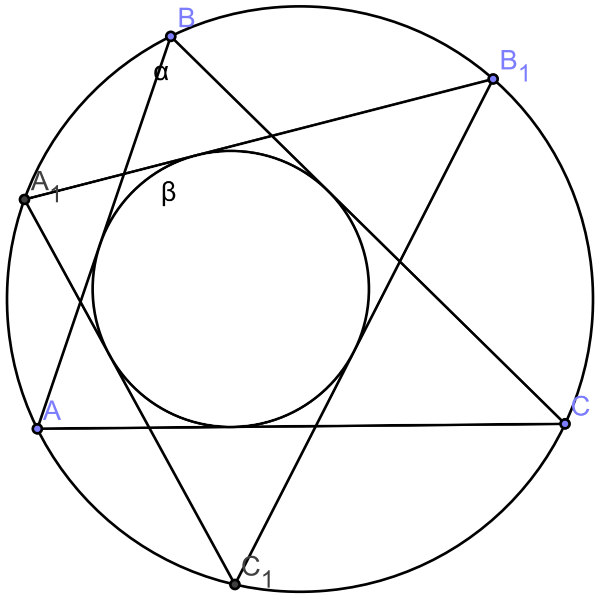
`Доказательство.` Пусть I – ценрт вписанной окружности ,которая, как известно, совпадает с точкой пересечения биссектрис, поэтому $\angle IAC = \angle BAI$ и $\angle ABI = \angle CBI$. Отмети также, что $\angle B_1AC = \angle B_1BC$, т.к. опираются на дугу B_1C. Далее, $\angle AIB_1 = \angle IAB + \angle ABI$(теорема о внешнем угле треугольника), следовательно $\angle IAB_1 = \angle AIB_1$,т.е. ΔAIB_1 равнобедренный $\Rightarrow AB_1 = B_1I$. По теореме синусов из треугольника B_1AB заключаем, что $AB_1 = 2R\sin\angle ABB_1$, а из треугольника BIH находим, что $BI = \frac{r}{\sin\angle IBH}$. Теперь, соеденив центр вписанной и описанной окружности, получим

$$(R-d)(R+d) = BI \cdot IB_1 = \frac{r}{\sin\angle IBH} \cdot 2R\sin\angle ABI = 2rR.$$

Упр 11. Докажите, что в любом треугольнике $R \geq 2r$. Для каких треугольников равенство обращается в равенство.

Упр 12. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, I, C, касается окружности, описанной около треугольника BHI. Покажите, также, что окружность, описанная около треугольника AIC, проходит через цетр вневписанной окружности.

Вообще говоря, такой факт как теорема Эйлера приоткрывает дверцу в следующий удивительный уголок элеметарной геометрии. Допустим, что мы описали окружность α вокруг треугольника ABC и вписали в него окружность β, тогда оказывается существую бесконечно много треугольков, для которых окружности α и β будут описанными и вписанными соответственно. А именно, если мы возьмём на окружности α точку B_1, и пусть касательные к окружности β, проведённые из точки B_1, пересекают α в точках A_1 и B_1, тогда прямая A_1B_1 касается окружности β.



`Доказательство.` Допустим, что это не так, тогда отрезок A_1C_1 не касается окружности β. В таком случае, сохраняя центр окружности β начнём увеличивать(если β пересекает A_1C_1, то нужно радиус уменьшать) её радиус до той поры, пока окружность не каснётся отрезка A_1C_1. Тогда, для полученной таким образом окружности β_1, запишем теорему Эйлера

$$R^2 = d^2 + 2r_1R$$

Сравнивая это тождество, с формулой Эйлера для окружностей α и β

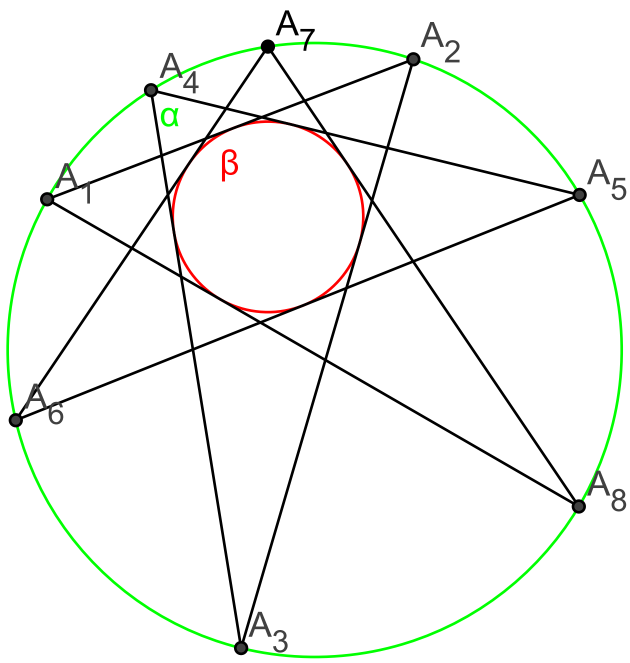
$$R^2 = d^2 + 2rR,$$

заключаем, что $r = r_1$, поэтому A_1C_1 касается окружности β.

Только что мы доказали частный случай так называемой

теоремы Понселе. Пусть окружность β лежит в окружности α. Из точки A_1 окружности α проведём касательную к окружности β, обозначим A_2 вторую точку пересечения касательной с α. Из точки A_2 вновь проведём касательную к окружности β и отметим точку A_3 её пересечения с α. Аналогично получим точки $A_4, A_5 \cdots$ Если окажется, что $A_1 = A_n$, то для любой другой точки $\tilde{A}_1$ совпадёт с $\tilde{A}_n$.

Упр №13⋆. Докажите теорему Понселе.



Заметим, что при движение одной из вершин треугольника, например A, по окружности α положение двух других определяется однозначно. В связи с чем возникает вопрос, а по каким траекториям движутся замечателльные точки треугоьника, при движение вершины A по окружности α ?

Радикальная ось.

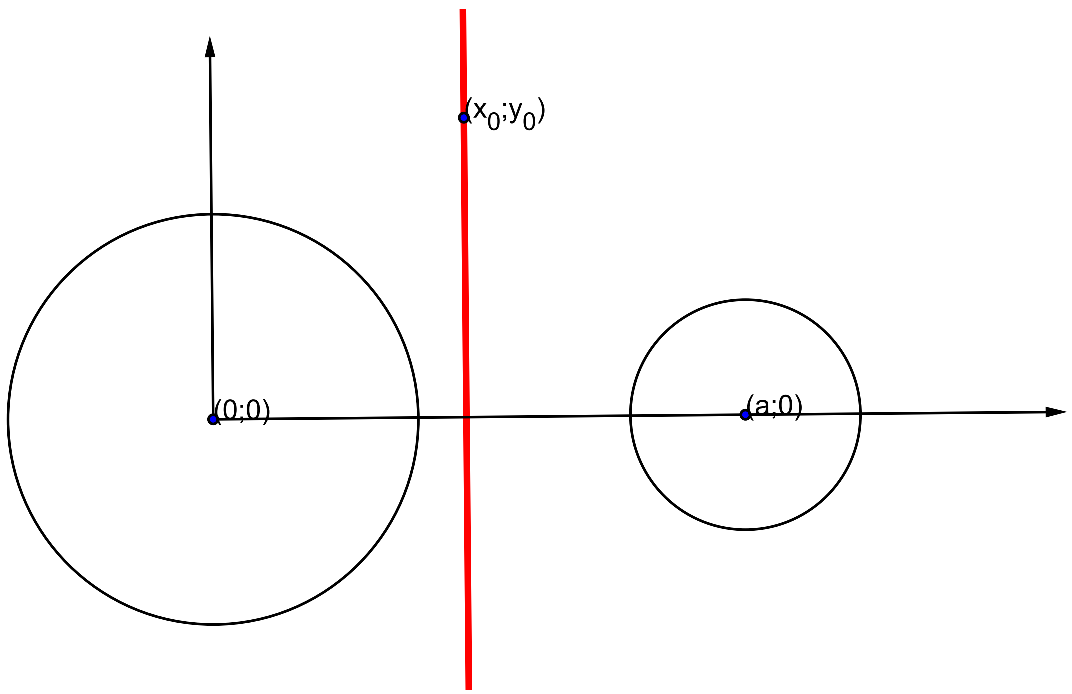
До сей поры так и неясно чего ради вводилось понятие степени точки – все задачи и без него вполне решаются. В этой части понятие степени точки расправит крылья. Но для начала нужно решить

Задача №6. Найдите геометрическое место точек плоскости, степени которых относительно двух данных окружностей одинаковы.

`Решение.` Здесь удобно воспользоваться методом координат. Систему координат выберем следующем образом: ось x совпадает с прямой, соединяющей центры окружностей, тогда ось y берём, как обычно, перпендикулярно оси x . Пусть радиусы окружжностей будут r_1 и r_2 соответственно, через a обозначим расстояние между окружностями. Итак, пусть точка из искомого множества имеет координаты $(x_0; y_0)$. Запишем условие равенства степеней относительно двух окружностей:

$$x_0^2 + y_0^2 - r_1^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 - r_2^2 \Rightarrow x_0 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - a^2}{2a}.$$

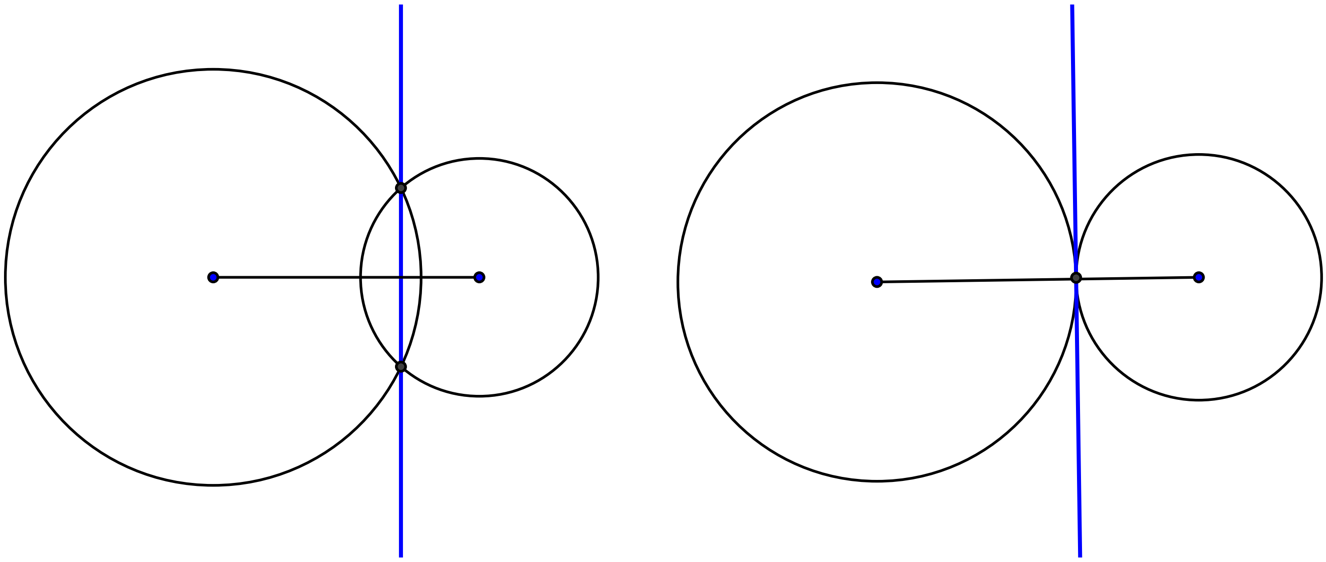
Получили уравнение прямой перпендикулярной линии цетров. На самом деле, мы получили, что любая точка из искомого множества лежит на этой прямой, а теперь нужно показать, что любая точка этой прямой обладает требуемым свойством. Но в этом нетрудно убедится, проведя выкладку в обратном порядке. Найденную прямую называют *радикальной осью* двух данных окружностей.



Далее естественным образом возникает

Упр. 14 Постройте радикальную ось двух окружностей.

На самом деле, для построения радикальной оси достаточно найти хотя бы одну точку этой оси. Действительно, ведь мы знаем, что радикальная ось является прямой перпендикулярной линии цетров окружностей, поэтому, если удалось найти одну точку радикальной оси, то для построения следует просто из этой точки опустить(либо восстановить) перпендикуляр к прямой цетров двух окружностей. Так, например, если окружности пересекаются, то радикальная ось является просто-таки прямой, соединяющей общие точки окружностей, а в случае касания радикальная ось будет проходить через точку касания перпендикулярно линии центров, т.е. будет касательной к каждой из окружностей.

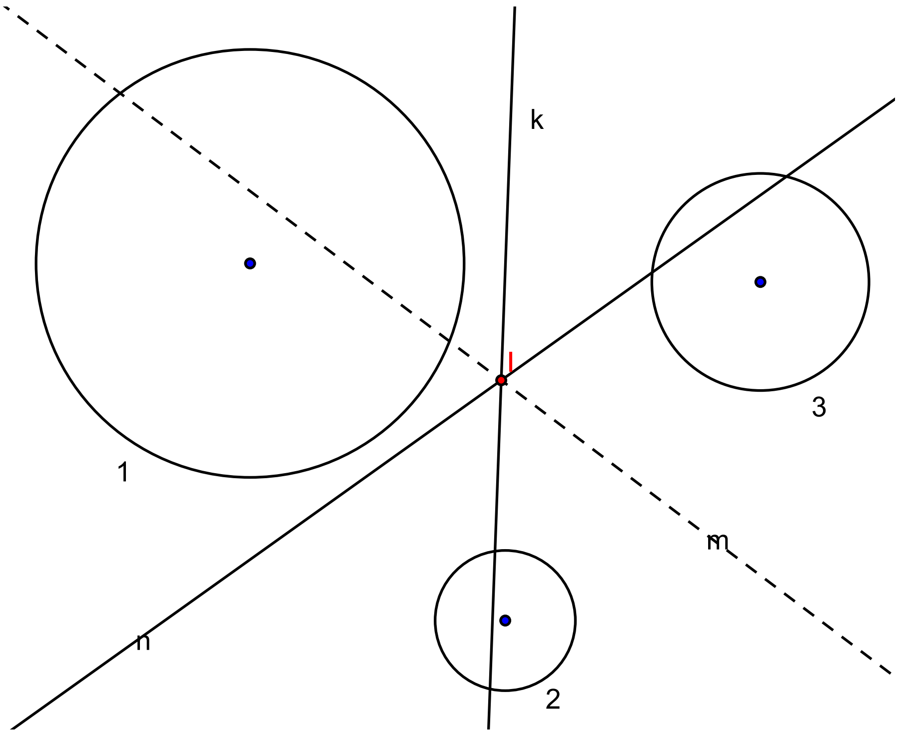


По сути, понятие радикальной оси отвечает на естественный вопрос о том

Упр №15. Каково множество точек, для которых касательные к двум данным окружностям имеют равные длины?

Отмети также, что окружности, имеющие общую радикальную ось, называются *соосными*.

Рассмотрим теперь три окружности *1, 2, 3*, центры которых не лежат на одной прямой. Любые две из этих окружностей имеют свою радикальную ось, тогда рассмотрим точку I пересечения любых двух из низ, например k(радикальная ось окружностей 1 и 3) и n(радикальная ось окружностей 1 и 2). Сравним стпень точки I относительно трёх данных окружностей. Раз точка I лежит на радикальной оси первой и второй окружностей, то её стпень относительно этих двух окружностей одинакова. По тем же причинам стпень этой точки одинакова и для окружностей 1 и 3, а поэтому степень этой точки одинкакова относительно всех трёх данных точек.



А что это значит? Так ведь это означает, что точка обязана лежать и на третьей радикальной оси! Таким образом мы показали, что все три радикальные оси k, m и n пересекаются в одной точке!

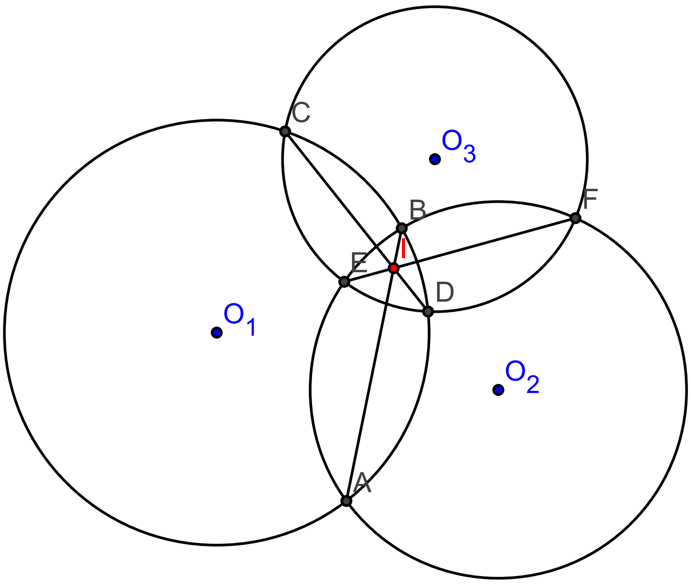
Контрольный вопрос. Почему в теореме требуется, чтобы центры не лежали на одной прямой?

Итак, нами доказана

Теорема №2. Если центры трёх окружностей не лежат на родной прямой, тогда их радикальные оси пересекаются в одной точке. Эту точку называют радикальным цетром трёх окружностей.

Силу этой теоремы посмотри для начала на классической

Задаче №7. Три окружности попарно пересекаются в точках A и B, C и D, E и F. Докажите, что прямые AB, CD и EF пересекаются в одной точке.

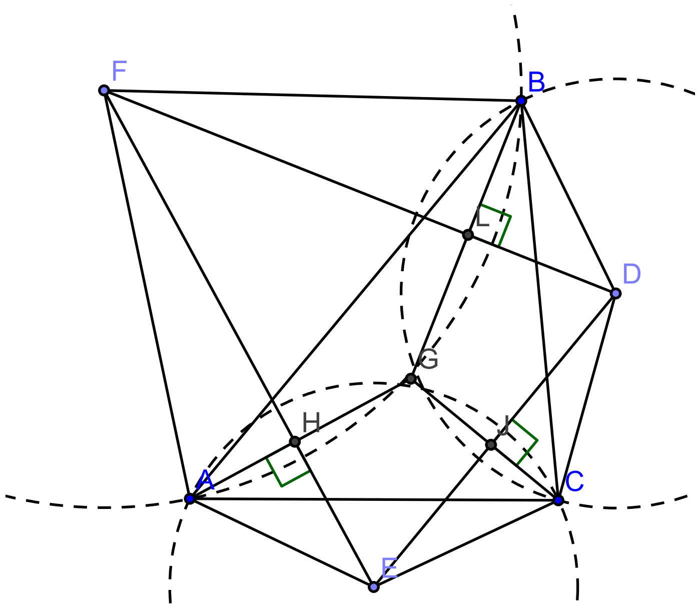


`Решение.` Прямая AB является общей хордой окружностей с центрами O_1 и O_2, а поэтому является их радикальной осью. Анологично, для двух других хорд CD и EF. Таким образом, все три хорды являются радикальными осями, как раз теми, о которых шла речь в теореме №2, и, следовательно, по той же самой теореме №2, три хорды пересекаются в одной точке.

Рассмотрим более «свежий» пример

Задача №8(Математическая олимпиада США, 1997 год). На сторонах треугольника ABC во внешнюю границу построены равнобедренные треугольники BCD, CAE и ABF. Докажите, что прямые, проходящие через точки A, B и C перпендикулярно EF, FD и DE соответственно, пересекаются в одной точке.

`Решение.` В задаче требуют доказать, что три прямые пересекаются в одной точке, а как раз для этой цели у нас имеется теорема №2, но как е здесь применить? Ведь в теореме шла речь о радикальных осях окружностей, а тут ни слова про окружности нет. Если же присмотреться, то окружности здесь есть, а именно вершины равнобедреннх треугольников F, D и E являются центрами окружностей с радиусами FA, DB и EC соответственно. Получаем такую картинку



Теперь же до решения совсем близко, ведь, например точка принадлежит радикальной оси окружностей с центрами F и E. С другой стороны прямая AH перпендикулярна линии центров тех же окружностей, и следовательно, прямая AH является радикальной осью окрудностей с центрами в точках F и E. Анологично, прямые BL и CJ также являются радикальными осями, по теореме №2 эти три прямые пересекуться в одной точке!

Посмотрите, ведь в формулировке последней задачи ни слово не было об окружностях и уж тем более о радикальных осях, но радикальная ось, сделав своё дело, осталась за кадром. Кстати, из этого решение можно узреть каким образом задача придумывалась.

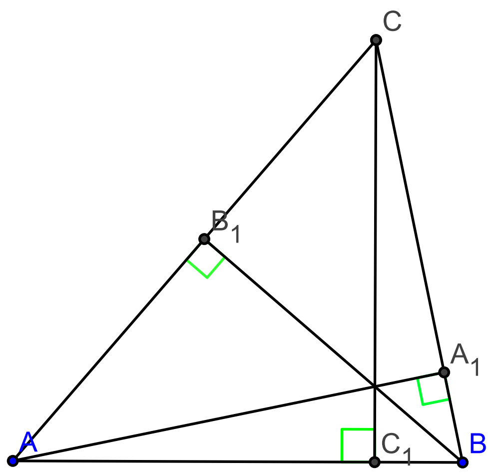
Вообще же, порою понятие радикальной оси позволяет взгялнуть на знакомые объекты под новым углом и найти новые свойства.

Рассмотрим, например

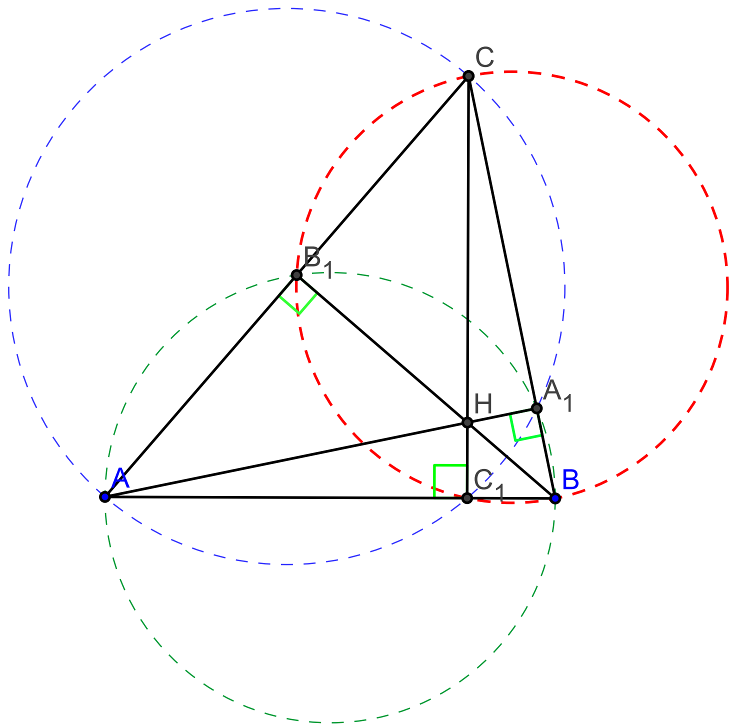
Ортоцентр.

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке. Сей факт известен с незопамятных времён. Так вот точку пересечения высот называют ортоцентром треугольника.

Интересено заметить то, что факт пересечения высот нетрудно обосновать с помощью нашей теоремы №2. Дейтсвительно, рассмотрим треугольник ABC проведём в нём три высоты AA_1, BB_1 и CC_1.



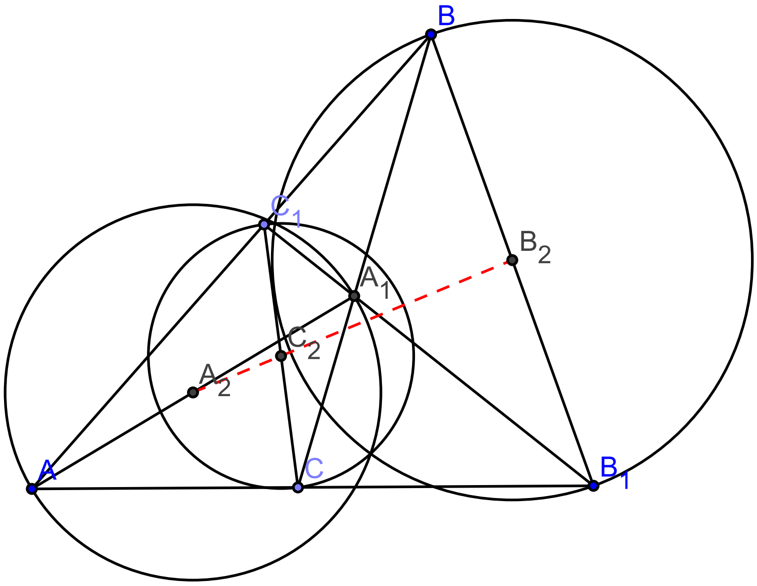
Однако, можно приметить, что из точек A_1 и C_1 отрезок AC виден под прямым углом. Следовательно, точки A, C_1, A_1 и C лежат на одной окружности, центром которой является середина стороны AC. Анологично получаем ещё две окружности.



В результате чего мы же пришли к задаче «о трёх хордах»(задача №7), поэтому три высоты пересекаются в одной точке.

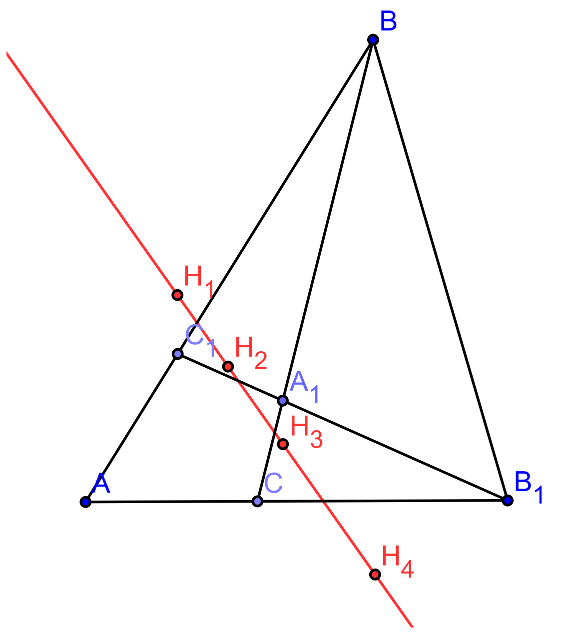
Упр. №16. Высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H, M и N – середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что $A_1B_1 \perp MN$.

В нашем примере радикальная ось «помогла» ортоцентру, а вот сейчас пронаблюдаем обратную картину. Проведём в треугольнике произвольные отрезки, соединяющие вершины с произвольной точкой на противоположной стороне(такие отрезки называют *чевианами*) и построим на всех трёх чевианах окружности как на диаметрах. Тогда каждое основание высоты попадёт на соответствующую окружность, ибо из основания высоты соответствующая чевиана видна под прямым углом. Но тогда мы получаем, что для трёх этих окружностей ортоцентр является радикальным центром. Из этого же наблюдения получаем, что если мы построим на двух чевианах как на диаметрах окружности, то их радикальная ось пройдёт через ортоцентр исходного треугольника. Таким вот инетресным образом связан ортоцентр с радикальными осями, но на этом приключения не заканчиваются. Итак, мы показали, что если на двух произвольных чевианах как на диаметрах построить окружности, то их радикальная ось пройдёт через ортоцентр треугольника. Выберем теперь основания чевиан A_1, B_1 и C_1 так, чтобы они лежали на одной прямой

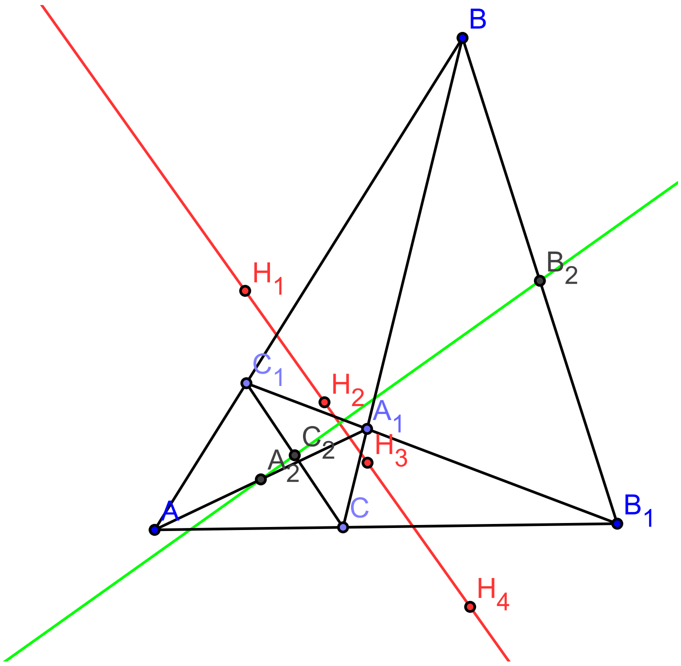


Теперь построим на каждой из чевиан AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах окружности, их центры обозначим A_1, B_1 и C_1 соответственно. Тогда, согласно только что доказанной теореме радикальные оси любых двух из этих окружностей должны пройти через ортоцентр треугольника ABC, с другой стороны, на этот же рисунок можно посмотреть так будто треугольник BC_1A_1 исходный и на его сторонах (точнее продолжениях) взяты точки A, C и B_1 в качестве основания чевиан. Но тогда мы получаем, что радикальны оси окружностей должны пройти и через ортоцентр треугольника BC_1A_1! Анологично, для треугольников A_1B_1C и AC_1B_1, т.е. каждая из трёх радикальных осей пройдёт через каждый из четырёх ортоцентров! Ух, а что бы это значило? Так ведь ортоцентры у нас, очевидно, различные, а любыя прямая, в том числе и радикальная ось задаётся двумя точками, стало быть все радикальные оси совпадают, т.е. окружности являются соосными, поэтому и все четыри ортоцентра лежат на одной прямой!

Факт на самом деле потрясающий, т.е. мы берём произвольный четырёхугольник AC_1A_1C, лишь бы противоположные стороны не были параллельны, продлив противоположные AC_1 и CA_1, C_1A_1 и AC стороны до пересечения, получим так называемые *полный четырёхвершинник* , тогда ортоцентры четырёх треугольников – двух «маленьких»(ΔBC_1A_1 и ΔA_1B_1C) и двух «больших»(ΔABC и ΔAC_1B_1), лежат на одной прямой!



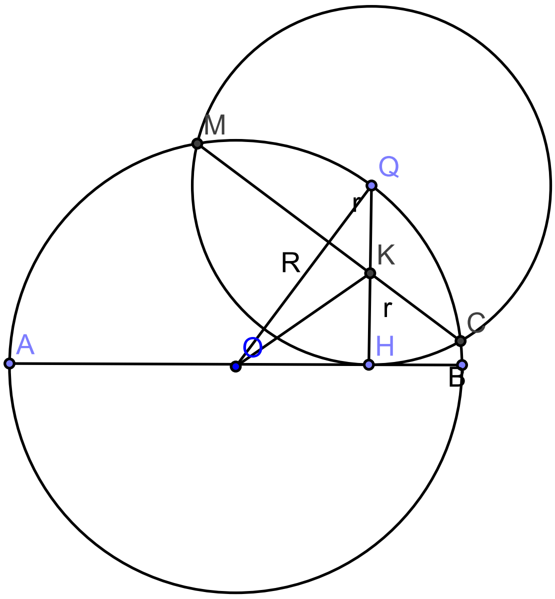
Но и это не всё! Ведь мы помним, что радикальная ось перпендикулярна линии цетров окружностей, тогда получим, что прямая A_2C_2 перпендикулярна прямой H_1H_4, но по тем же причинам C_2B_2 перпендикулярна всё той же прямой H_1H_4, стало быть точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой! Эта прямую называют *прямой Гаусса*, а прямую H_1H_4 *прямой Обера*. Таким образом, прямая Гаусса перпендикулярна прямой Обера! Попробуйте доказать сей факт без радикальных осей?!



В рассмотренной конструкции очень интересно то, что в формулировках нет и намёка на окружности и радикальные оси, вся их могучая работа остаётся за кадром. И это как раз характерно для радикальных осей так, например, задачу №5, решение которой мы уже обсуждали, можно решить с помощью радикальных осей! Напомним её формулировку

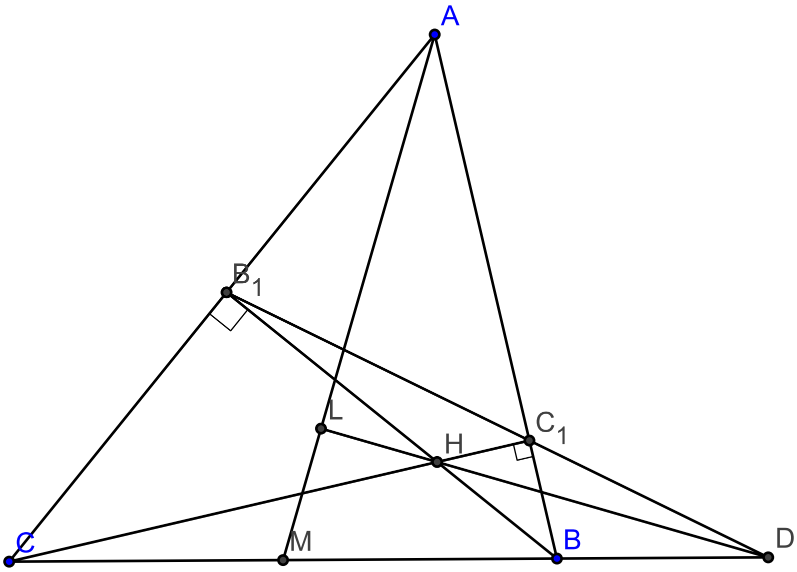
Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB. Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.

`Решение(второй способ).`

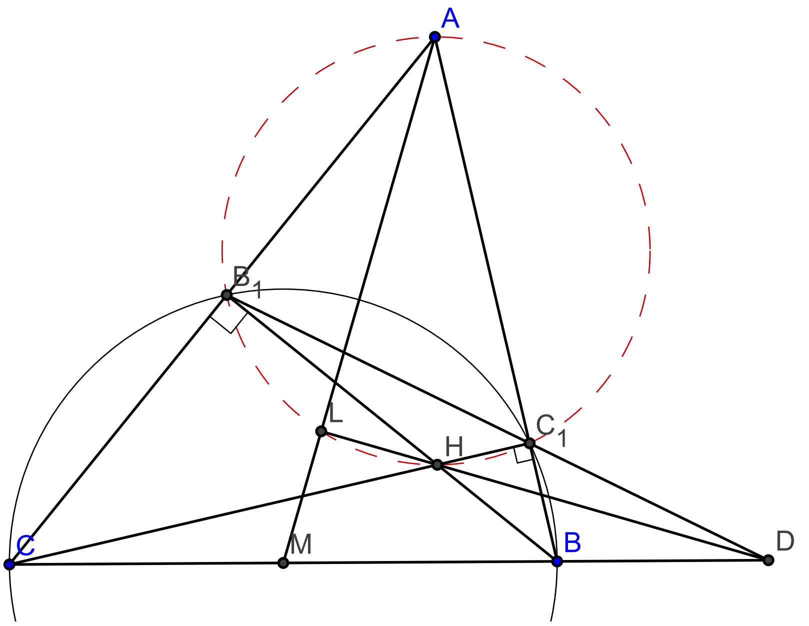


Если переформулировать эту задачу на языке радикальных осей, то по сути требуется доказать, что середина отрезка QH точка K лежит на радикальной оси окружностей с центрами в точках Q и O, т. е. на на отрезке MC. А как же показать-то, что точка K очутилась на отрезке MC ? Попробуем прямо по определению радикальной оси действовать, т.е. если мы покажем, что степени точки K относительно обеих окружностей равны, то ведь мы и задачу всю одолеем. Степень относительно окружности с центром в точке Q считается совсем просто: $KQ^2-(QH)^2=-3r^2$, где через $2r$ обозначили радиус окружности. Степень относительно второй окружности высчитывается немногим труднее: $KO^2=KH^2+OH^2=KH^2+(OQ^2-QH^2)=R^2-3r^2$(при вычислении дважды использовали теорему Пифагора для прямоугольных треугольников KHO и QHO.)$\Rightarrow$ $KO^2-R^2=-3r^2$. Итак, мы видим, что степень точки K относительно обеих окружностей действительно одинакова. Теперь сравните это вот решение с первым и решите какое из них проще. И здесь опять-таки радикальные оси остаются в тени. В этом отношении очень интересна следующая

Задача №9. Пусть BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника $ABC(AB\neq BC)$. Пусть M - середина стороны BC, H - ортоцентр треугольника ABC, D – точка пересечения прямых BC и B_1C_1. Докажите, что $DH\perp AM$.



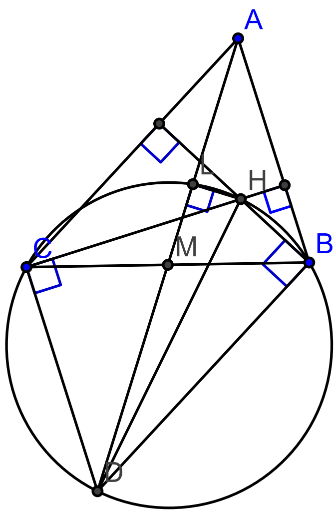
`Решение.` Для того, чтобы что-то про точку D доказывать надобно понять нам как она вообще получилась. По условию она получилась в результате пересечения прямых B_1C_1 и BC. Точки B_1 и C_1 являются основаниями высот, поэтому точки C, C_1, B и B_1 лежат на одной окружности с диаметром BC. С другой стороны, в четырёхугольнике B_1HC_1A: $\angle HB_1A+\angle HC_1A=90^\circ+90^\circ=180^\circ$. И стало быть B_1HC_1A – вписанный четырёхугольник, причём AH является диаметром описанной окружности.



Так так, что-то уже проясняется. Видим, что в найденных двух окружностях B_1C_1 является общей хордой. Ага! Общие хорды на уже попадались, когда мы говорили про теорему о трёх радикальных осях трёх окружностей! А у нас-то пока всего две окружности и ось стало быть одна... А что же нас просили доказать-то? то, что $DH \perp AL$. Предположим на минуту, что мы это уже доказали, но тогда ведь точка L тоже попадёт на окружность с диаметром AH (продумайте это!). Итак, B_1C_1 общая хорда, а вот если бы LH тоже стала общей хордой для окружности, проходящей через C_1, H, L, B_1, и окружности, проходящей через точки C, L, H и B, то можно было бы просто применить теорему о трёх радикальных осях. Но «беда» заключается в том, что мы пока не знаем, что точки C, L, H и B лежат на одной окружности, т.е. нужно решить

Подзадачу (олимпиада 239 школы. 8-9 классы. Санкт-Петербург. 1997 год. Берлов С.) Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, L – его проекция на медиану AM этого треугольника. Докажите, что точки B, L, H и C лежат на одной окружности.

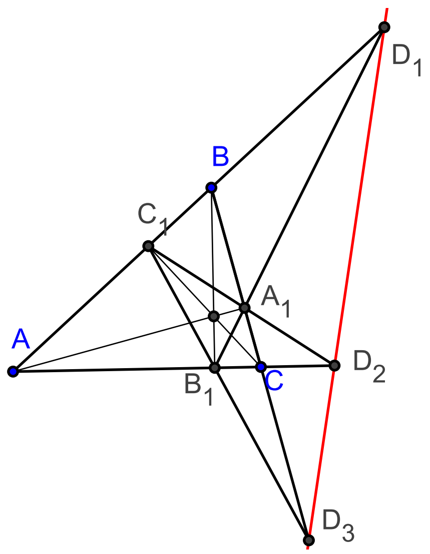
`Решение.` Решение легко понять, посмотрев на следующую картинку



Здесь оказывается удобным применить трюк полезный при возникновении медианы, т.е. достраиваем треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, тогда $CH \perp CD, BH \perp BD$, т.к. $BD||AC, AB||CD$. Теперь-то видно, что точки C, L, H, B и D лежат на одной окружности с диаметром DH.

С подзадачей справились, возвращаемся к исходной. Теперь ясно с какого боку нужно заходить, а именно, мы докажем, что BC, B_1C_1 и прямая ML, перпендикулярная к AM, пересекаются в одной точке, что, очевидно, равносильно исходной задаче. Но сделать это совсем просто, осталось посмотреть на три окружности, проходящие через C, B_1, C_1, B- первая, C, L, M, B - вторая и ,наконец, L, B_1, A, C_1, M - третья, по теореме о трёх радикальных осях три нужные прямые пересекуться в одной точке.

Интересно заметить, что эта задача имеет потрясающее продолжение. Рассмотрим опять неравнобедренный треугольник ABC, AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты треугольника, D_1, D_2, D_3 – точки пересечения прямых AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1, соответственно, тогда точки D_1, D_2 и D_3 лежат на одной прямой. Прямую, на которой дежат точки D_1, D_2 и D_3, называют *ортоцентрической осью* треугольника ABC.



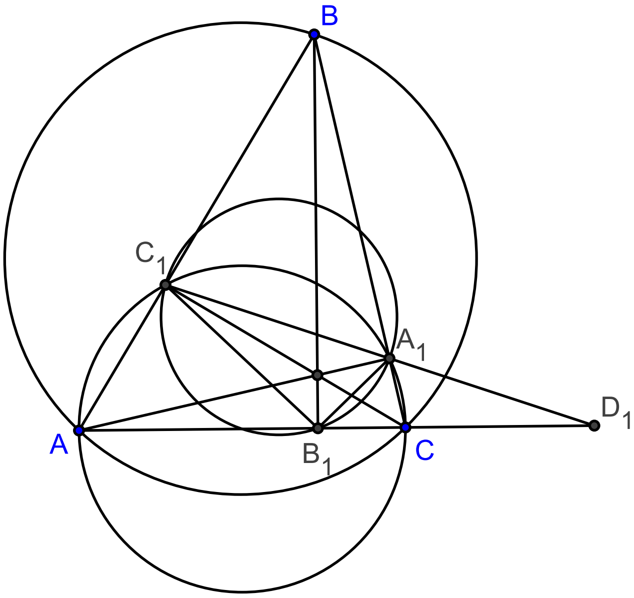
И здесь на помощь приходит радикальная ось! Конечно же, это звучит странно, ведь до сей поры радикальную ось мы использовали для доказательства того, что три прямые пересекаются в одной точке. Здесь же радикальная ось помагает иначе, точнее, мы покажем, что точки D_1, D_2 и D_3 лежат на радикальной оси описанной окружности треугоьника ABC и описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$. Последнюю окружность также называют окружностью девяти точек.

Упр. №17. Докажите, что в произвольном треугольнике основания высот, середины сторон, а также середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром лежат на одной окружности.

Упр. №18. Покажите, что в произвольном треугольнике точка пересечения медиан M, ортоцентр H и центр описанной окружности O лежат на одной прямой, при этом $OM : MH = 1 : 2$. (Прямая Эйлера.)

Упр. №19. Докажите, что центр окружности девяти точек O_1 лежит на прямой Эйлера, при этом $OM : MO_1 : O_1M = 2 : 1 : 2$.

Покажем, например, что точка D_1 лежит на радикальной оси описанной окружности ΔABC и описанной окружности $\Delta A_1B_1C_1$. Сей факт нетрудно усмотреть из следующей картинки



Тут на помагает вспомогательная окружность, проходящая через точки A, C_1, A_1 и C. С одной стороны точка D_1 лежит на радикальной оси окружности описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, и вспомогательной окружности, а с другой стороны на радикальной оси описанной окружности треугольника ABC и опять-таки вспомогательной окружности. Следовательно, точка D_1 должна лежать(по теоереме о трёх радикальных осях) и на радикальной оси описанной окружности треугольника ABC и описанной окуржности треугольника $A_1B_1C_1$. Точно также доказывается для точек D_2 и D_3, что они принадлежат той же радикальной оси.

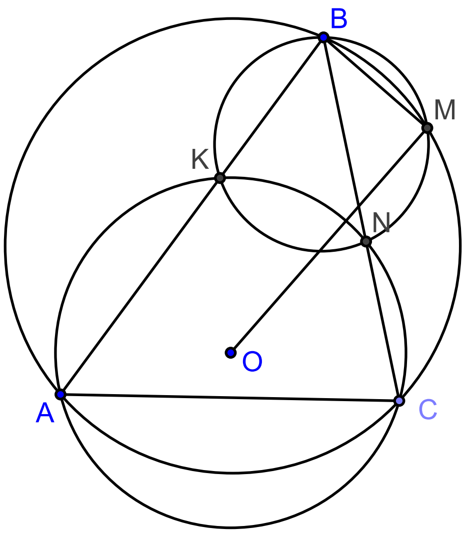
Итак, мы показали, что ортоцентрическая ось треугольника является радикальной осью описанной окружности и окружности девяти точек, но мы также знаем, что радикальная ось любых двух окружностей перпендикулярна линии центров окружностей, поэтому получаем, что ортоцентричексая ось треугольника перпендикулярна прямой Эйлера! Факт абсолютно потрясающий тем удивительнее, что и его можно использовать в качестве инструмента для доказательста других теорем.

Упр. №20. Покажите, что основния внешних биссектрис треугоьника лежат на одной прямой (*ось внешних биссектрис*), при этом ось внешних биссектрис перпендикулярна прямой, соединяющей цетры вписанной и описанной окружностей треугольника.

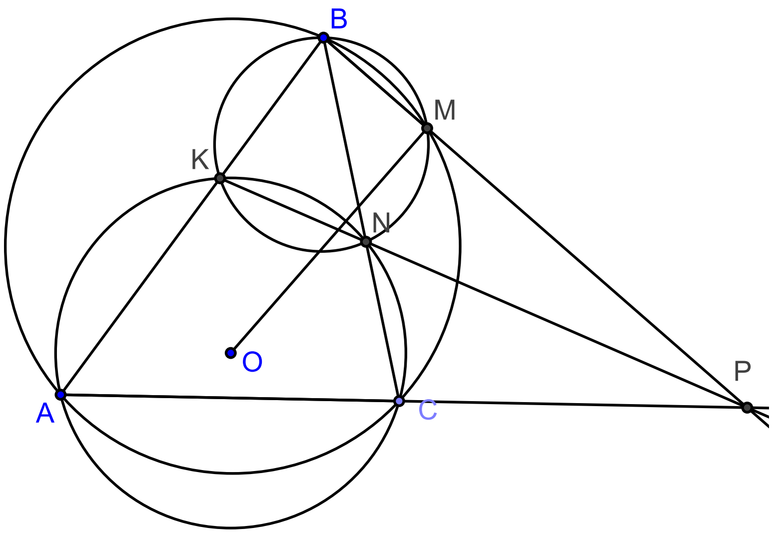
Задача Игорь Фёдоровича.

В уже далёком 1985 году участникам XXVI Международной математической олимпиады предлагалась следующая

Задача №10. Окружность с центром в точке O, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках K и N соответственно. Окружности описанные вокруг треугольников BKN и ABC пересекаются в точках B и M. Докажите, что $\angle BMO = 90°$.

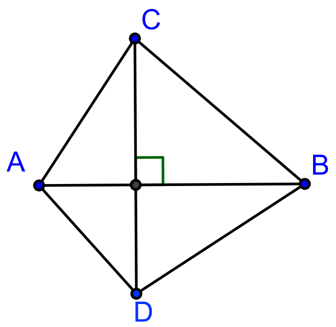


Решение. В решении этой задачи теорема о радикальных осях выступает как вспомогательный инструмент, а именно с помощью этой теоремы устанавливаем, что прямые AC, KN и BM пересекаются в одной точке, обозначим её P.



Для доказательства того, что $OM \perp BP$ удобно воспользоваться следующей полезной

Лемма 1. Пусть даны четрые точки общего положения A, B, C и D, тогда $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.



Доказательство леммы в одну сторону является просто упражнением на теорему Пифагора, а в обратную сторону можно доказать, например, от противного.

Упр. №21. Получите, используя лемму 1, ещё одно «нешкольное» доказательство того, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Но и этого для решения задачи ещё малова-то (всё-таки Международная олимпиада!), нужно ещё и заметить, что точки P, M, N и C лежат на одной окружности, что следует из цепочки: $\angle BMN = \angle AKN = \angle NCP$. Если обозначить радиус окружности, проходящей через точки A, K, N и C, через r, то справедливы следующие равенства:

$PM \cdot PB = PN \cdot PK = OP^2 - r^2$(вот она степень точки!)

$BM \cdot BP = BN \cdot BC = OB^2 - r^2$(используем то, что $MNCP$ вписанный.)

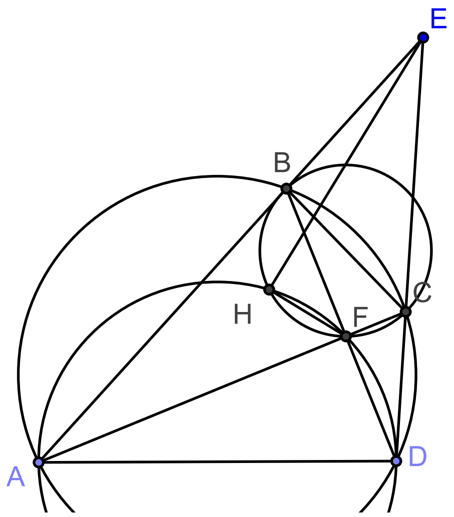
Теперь немного алгебраического колдовства:

$OB^2 - OP^2 = BP \cdot (BM - PM) = (BM + PM) \cdot (BM - PM) = BM^2 - PM^2$, тогда по лемме 1 получаем, что $OM \perp BP$!

Автором этой красивой геометрической задачи является замечательный геометр Игорь Фёдорович Шарыгин (1937-2004). В этом пункте мы проследим как конструкция Игоря Фёдоровича используется для решения других геометрических задач.

Очень интересный remake на задачу Игоря Фёдоровича предлагался на математической олимпиаде Болгарии в 1996 году.

Задача №11. Продолжения сторон AB и CD вписанного четерёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E, а диагонали AC и BD – в точке F. Описанные окружности треугольников AFD и BCF пересекаются в точках H и F. Докажите, что $\angle EHF = 90°$.

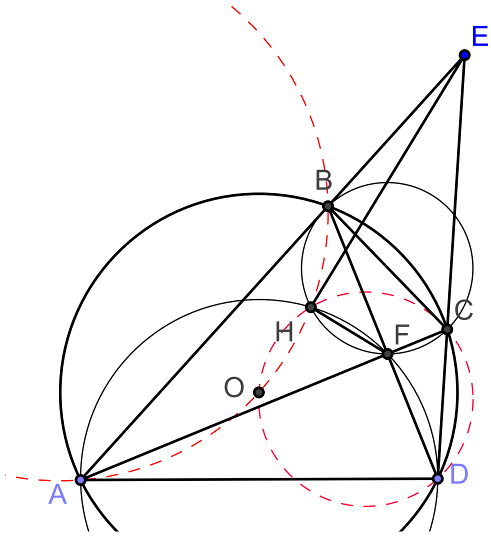


Решение. Задача «почти такая же» как и предыдущая и решается похожим образом.

Обозначим через O центр окружности, проходящей через A, B, C и D. Заметим, что

$$\angle AHB = 2\pi - \angle AHF - \angle BHF = 2\pi - (\pi - \angle ADF) - (\pi - \angle BCF) = \angle ADF + \angle BCF = 2\angle ADB = \angle AOB,$$

т.е. точка O лежит на окружности описанной около треугольника ABH. По анологичным причинам точка O лежит на окружности описанной около треугольника CDH, но тогда по теореме о трёх радикальных осях прямая HO должна пройти через точку E.

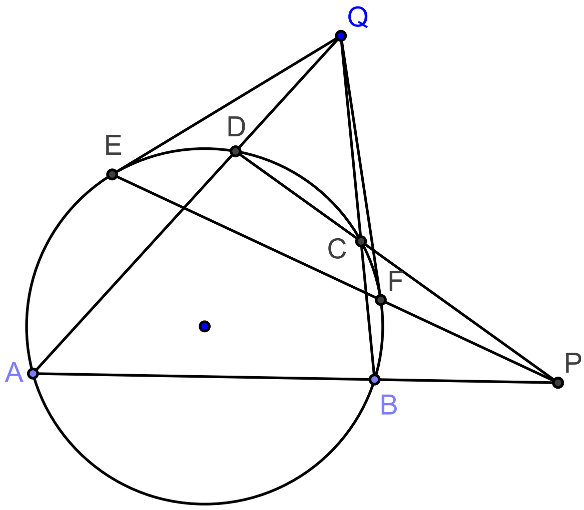


Теперь осталось совсем чуть-чуть. По свойствам вписанных углов получим следующую цепочку равенств

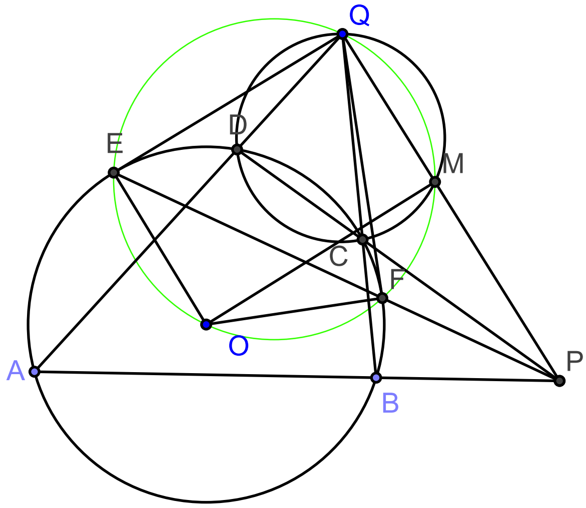
$$\angle OHF = \angle OHC - \angle HFC = \pi - \angle ODC - \angle CBF = \pi - \angle ODC - \frac{1}{2}\angle COD = \frac{\pi}{2}.$$

В 1997 году на математической олимпиаде Канады возникает «абсолютно» для нас новая

Задача №12. Продолжения сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон AD и BC – в точке Q. Из точки Q к окружности проводят две касательные, E и F – точки касания. Докажите, что точки F, E и P лежат на одной прямой.



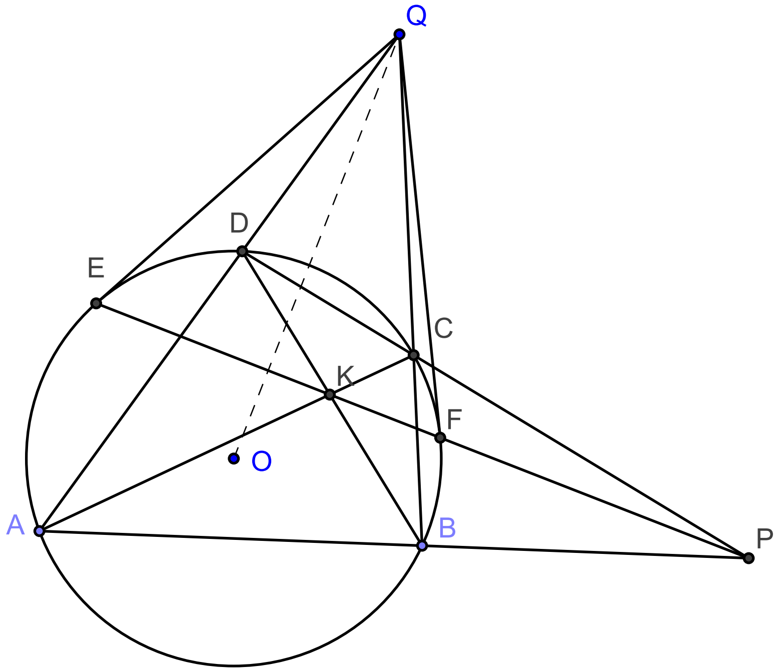
`Решение`. На первый взгляд кажется, что задача имеет мало общего с предыдущими двумя, но давайте достроим нашу конструкцию до конструкции Игоря Фёдоровича.



Мы уже доказали, что $\angle OMQ = 90°$, а по свойству касательных к окружности замечаем, что $\angle OEQ = \angle OFQ = 90°$, таким образом, получаем, что точки O, E, Q, M и F лежат на одной окружности с диаметром OQ. И вот теперь в который уже раз приходит на выручку теорема о трёх радикальных осях, ибо EF является радикальной осью для только что полученной окружности и описанной окружности четырёхугольника $ABCD$, QM – радикальная ось для окружности вспомогательной (проходящей через O, E, Q) и описанной окружности треугольника DCQ, а DC – радикальная ось для описанных окружностей вокруг четырёхугольника $ABCD$ и треугольника DQC, поэтому прямая EF тоже проходит через точку P. Взобрались и на эту вершину![2]

Оказывается, что три предыдущие задачи позволяют доказать следующий

Фантастический факт. Через точку Q, которая лежит вне окружности, проводятся две *произвольные* секущие, пересекающие окружность в точках A и D, C и B. Прямые AB и DC пересекаются в точке P, отрезки AC и BD – в точке K. Пусть прямая PK пересекает окружность в точках EF, тогда QE и QF будут касательными к окружности!



Теорема совершенно потрясающая, ведь мы фиксируем точку, проводим через неё абсолютно произвольные секущие, получаем некоторый четырёхугольник, и точки пересечения

[2]На таких высотах воздух очень разряженный – дышать тяжело, поэтому если Вам не удалось взобраться, то рекомендуется стпуститься чуть ниже и начать заново, т.е. перечитать весь пункт сначала.

прямой, соединяющей точку пересечения противоположных сторон отличной от исходной с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника, с окружностью будут служить точками касания для касательных, проведённых из исходной точки! Из этого факта следует, что точки пересечения диагоналей для всех полученных таким образом четырёхугольников лежат на одной прямой, т.к. точки E и F не зависят от выбора секущих.

`Доказательство фантастического факта.` Первое совсем простое наблюдение состоит в том, что $EF \perp OQ$, по «канадской» задаче мы знаем, что EF проходит через P. Другими словами прямая EF совпадает с перпендикуляром опущенным из точки P на прямую OQ.[3] С другой стороны из решения «болгарской» задачи нетрудно получить, что $CP \perp OQ$. Таким образом точки P, F, K, E лежат на одной прямой!

Упр. №22. Постройте касательную к данной окружности из данной точки, использую только лишь линейку.

Упр. №23 . (Математическая олимпиада Китая, 1996 год.) Пусть H отртоцентр остроугольного треугольника ABC. Касательные, проведённые из вершины A, к окружности, построенной на BC как на диаметре, касаются её в точках P и Q. Докажите, что точки P, Q, H лежат на одной прямой.

Упр. №24. Четрырёхугольник $ABCD$, вписанный в окружность S. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра S на прямую, соединяющую точки пересечения противоположных сторон четырёхугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей.

[3] Строго говоря, перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, принято считать отрезком, но здесь это не так важно.

Заключение.

Начали мы с Вами с совсем простой задачи, и вот так, шаг за шагом, забирались на разные геометрические вершины. Каждое в отдельности восхождение, надеюсь, не было трудным, и вот теперь, после проделанной работы, можно полюбоваться пейзажами и почувствовать всю радость восхождения! Но, чтобы не возникло ощущения, что все вершины уже покорились, вот Вам несколько маршрутов для самомстоятельного восхождения.

1. Докажите, что середины четырёх общих касательных к двум непересекающимся окружностям лежат на одной прямой.

2. Через две из точек касания общих внешних касательных с двумя окружностями проведена прямая. Докажите, что окружности высекают на этой прямой равные хорды.

3. Три окружности попарно пересекаются в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2. Докажите, что $A_1B_2 \cdot B_1C_2 \cdot C_1A_2 = A_2B_1 \cdot B_2C_1 \cdot C_2A_1$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка A_1. Серединный перпендикуляр к отрезку A_1B пересекает сторону AB в точке M, а серединный перпендикуляр к отрезку A_1C пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой MN, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

5. Докажите, что диагонали AD, BE и CF описанного шестиугольника $ABCDEF$ пересекаются в одной точке (теорема *Брианшона.*)

6. Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, причём окружности S_i и S_{i+1} касаются внешним образом для $i = 1, 2, 3, 4 (S_5 = S_1)$. Докажите, что радикальная ось окружностей S_1 и S_3 проходит чрезе точку пересечения общих внешних касательных к S_2 и S_4.

7. Окружность ω касается двух параллельных прямых l_1 и l_2. Вторая окружность ω_1 касается l_1 в точке A и ω – внешне в точке C. Третья окружность ω_2 касается l_2 в точке B и ω касается внешне в точке D и, наконец, ω_1 – внешне в точке E. Пусть Q – точка пересечения прямых AD и BC. Докажите, что $QC = QD = QE$.

8. (*Индия, 1995 год.*) Прямая параллельная BC пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках D и E, соответственно. Пусть P произвольная точка внутри треугольника ADE, и F и G – точки пересечения DE с BP и CP, соответственно. Докажите, что точка A лежит на радикальной оси описанных окружностей треугольников PDG и PFE.

9. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка D. Строятся окружность ω_1, проходящая через точки B и D, и окружность ω_2, проходящая через точки C и D, таким образом, что точка пересечения ω_1 и ω_2, отличная от D, лежит на AD. Обозначим через E и F точки пересечения ω_1, ω_2 со стороной BC, соответственно, и через X, Y точки пересечения DF и AB, DE и AC, соответственно. Докажите, что $XY || BC$.

10. *(Московская городская математическая олимпиада. 2008 год. В. Филимонов.)* Через центр O вписанной в треугольник ABC окружности проведена прямая, перпендикулярная прямой AO и пересекающая прямую BC в точке M. Из точки O на прямую AM опущен перпендикуляр OD. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

11. *(Зональный тур Всероссийской олимпиады. 1997 год. Л. Смирнова.)* Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности S_1, а вершины B и D – на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN.

12. *(Зональный тур Всероссийской математической олимпиады. 2005 год. Л. Емельянов.)* Пусть AA_1 и BB_1— высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB, в точке C_1. Докажите, что отрезок CC_1 перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC.