Основные теоремы и формулы

Определение 1. Угловой величиной дуги называется отношение длины этой дуги к длине окружности, умноженное на 2π.

Теорема 1. *Величина центрального угла равна угловой величине дуги, на которую он опирается.*

Теорема 2. *Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.*

Следствие. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, или на равные дуги одной окружности, равны.*

Теорема 3. *Угол между касательной и хордой, выходящими из одной точки окружности, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной внутри этого угла.*

Теорема 4. *Угол, вершина которого расположена вне круга, измеряется полуразностью угловых величин дуг окружности этого круга, заключенных внутри угла.*

Теорема 5. *Угол, вершина которого расположена внутри круга, измеряется полусуммой угловых величин дуг, которые высекают из окружности круга стороны угла и их продолжения.*

Теорема 6. *Сумма противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна π, и наоборот, если сумма противоположных углов выпуклого четырехугольника равна π, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.*

Теорема 7. *Произведения длин отрезков двух пересекающихся хорд равны.*

Теорема 8. *Произведение длины отрезка секущей на длину ее внешней части есть величина постоянная, и она равна квадрату длины касательной, проведенной к окружности из той же точки.*

Решения задач

Задача 1. *Выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найти длину отрезка KC, если $BC = 4$, $AK = 6$.*

Доказательство. Пусть $KC = x$. Угол DBC равен углу DAC, так как эти углы вписанные, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу DC. Угол BAC равен углу DAC, так как AC — биссектриса угла BAD. Следовательно, угол DBC равен углу BAC. Тогда треугольник ABC подобен треугольнику BKC (по двум углам). Имеем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{KC} \iff BC^2 = AC \cdot KC \iff 16 = x(6 + x) \implies x = 2.$$

□

Ответ: $KC = 2$.

Задача 2. *Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислить длину стороны AC, если $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$.*

Доказательство. Пусть E — вторая точка пересечения прямой AD с окружностью. Пусть $\angle BCA = \gamma$. Тогда из прямоугольного треугольника ADC находим, что $\angle DAC = 90° - \gamma$. Треугольник AEN — прямоугольный, так как угол ANE этого треугольника опирается в окружности на диаметр AE. Из этого треугольника находим, что $\angle AEN = 90° - \angle EAN = 90° - (90° - \gamma) = \gamma$. С другой стороны, углы AEN и AMN равны (как вписанные, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу AN). Значит, угол AMN равен углу ACB. Следовательно, треугольник ABC подобен треугольнику ANM (по двум углам). Имеем

$$\frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AN} \iff AC = \frac{AB \cdot AM}{AN} = \frac{cn}{m}.$$

□

Ответ: $AC = \dfrac{cn}{m}$.

Задача 3. *Через центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC. Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q. Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.*

Доказательство. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, прямая OP пересекает окружность в точке D (D и B по разные стороны от прямой AC), прямая OQ пересекает прямую BC в точке E, $\angle ABC = \beta$. Из прямоугольного треугольника BCH находим, что $\angle BCH = 90^\circ - \beta$. Далее, из прямоугольного треугольника QCE находим, что $\angle CQE = 90^\circ - \angle QCE = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$. С другой стороны, величина угла ABC равна половине угловой величины дуги AC, так как этот угол вписанный, опирающийся на дугу AC. Величина угла DOC также равна половине угловой величины дуги AC, так как угол DOC — центральный, а точка D — середина дуги AC. Значит, углы DOC и ABC, а, следовательно, углы DOC и CQE равны, и треугольники CPO и COQ подобны (по двум углам). Имеем:

$$\frac{CP}{CO} = \frac{CO}{CQ} \iff CO^2 = CP \cdot CQ \iff CO = \sqrt{pq}.$$

□

Ответ: $R = \sqrt{pq}$.

Задача 4. *Окружность касается сторон угла с вершиной O в точках A и B. На этой окружности внутри треугольника AOB взята точка C. Расстояния от точки C до прямых OA и OB равны соответственно a и b. Найти расстояние от точки C до хорды AB.*

Доказательство. Опустим перпендикуляры CP, CQ и CR на прямые OA, OB и AB соответственно. Величина угла PAC равна половине угловой величины дуги AC, так как это угол между касательной и хордой, опирающийся на дугу AC. Величина угла ABC также равна половине угловой величины дуги AC, так как это вписанный угол, опирающийся на дугу AC. Значит, угол PAC равен углу ABC. Аналогично, равны углы QBC и CAB. Следовательно, треугольник PAC подобен треугольнику RBC (по двум углам), и треугольник QBC подобен треугольнику

RAC (по двум углам). Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{CP}{CR} = \dfrac{AC}{BC} \\ \dfrac{CQ}{CR} = \dfrac{BC}{AC} \end{cases} \implies \frac{CP}{CR} \cdot \frac{CQ}{CR} = 1 \iff CR = \sqrt{CP \cdot CQ} = \sqrt{ab}.$$

□

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Задача 5. *В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.*

Доказательство. Пусть E — точка пересечения хорд AB и CD, O — центр окружности. Проведем через точку D прямую DF, параллельную прямой AB. Пусть F — точка пересечения этой прямой и окружности, отличная от точки D. Так как трапеция $ABFD$ вписана в окружность, то она равнобокая ($BF = AD = m$). Отсюда также вытекает, что дуги AD и BF равны. С другой стороны, величина угла AED равна полусумме угловых величин дуг AD и BC, так как это угол между хордами, высекающими дуги AD и BC на окружности. Поскольку угол AED прямой, то полусумма дуг AD и BC, а, значит, BF и BC равна $\pi/2$, следовательно, угловая величина дуги CF равна π и CF — диаметр окружности. Таким образом, треугольник CBF — прямоугольный, $BC = n$, $BF = m$ и $CF = \sqrt{m^2 + n^2}$. □

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Задача 6. *Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что AC — биссектриса угла BAD, $BC = CD$, $\angle BCD = 160°$, $\angle CED = 130°$. Найти угол ABD.*

Доказательство. Докажем, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Применив к треугольникам ABC и ACD теорему синусов, получим, что

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{\sin \angle ABC} = \dfrac{BC}{\sin \angle BAC} \\ \dfrac{AC}{\sin \angle ADC} = \dfrac{CD}{\sin \angle CAD} \end{cases} \implies \sin \angle ABC = \sin \angle ADC,$$

так как $BC = CD$ и $\angle BAC = \angle CAD$. Значит, либо $\angle ABC = \angle ADC$, либо $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Первый случай невозможен, так как из равенства треугольников ABC и ADC следовало бы, что угол CED равен $90°$, что противоречит условию задачи. Значит, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$, и около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

Далее, из равнобедренного треугольника BCD находим, что $\angle DBC = 10°$, $\angle BEC = 50°$ как смежный к углу CED, $\angle BCE = 120°$ из суммы углов треугольника BCE, и, значит, $\angle ACD = \angle BCD - \angle BCE = 160° - 120° = 40°$. Наконец, угол $\angle ABD = \angle ACD = 40°$, так как эти углы вписанные, опирающиеся в окружности на одну и ту же дугу AD. $\square$

Ответ: $\angle ABD = 40°$.

Задача 7. *В остроугольном треугольнике ABC известно, что $AB = 2\sqrt{19}$, $BC = 6$. Кроме того, центр окружности, проведенной через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C. Найти AC.*

Доказательство. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, CA, AB соответственно, O — центр окружности, проходящей через точки A_1, B_1, C_1. Так как треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный, то точка O лежит внутри этого треугольника. Рассмотрим четырехугольник OB_1CA_1, в нем $\angle B_1CO = \angle OCA_1$, $B_1O = OA_1$. Применим к треугольникам B_1CO и OCA_1 теорему синусов. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{B_1O}{\sin\angle B_1CO} = \dfrac{CO}{\sin\angle CB_1O} \\ \dfrac{OA_1}{\sin\angle OCA_1} = \dfrac{CO}{\sin\angle CA_1O} \end{cases} \implies \sin\angle CB_1O = \sin\angle CA_1O.$$

Значит, либо эти углы равны, либо дают в сумме $180°$. Если $\angle CB_1O = \angle CA_1O$, то треугольники CB_1O и CA_1O равны, треугольник ABC — равнобедренный ($AC = BC = 6$) и тупоугольный, что противоречит условию задачи.

Если $\angle CB_1O + \angle CA_1O = 180°$, то четырехугольник OB_1CA_1 можно вписать в окружность. Так как, в этом случае, $\angle B_1OA_1 + \angle B_1CA_1 = 180°$, $\angle B_1CA_1 = \angle B_1C_1A_1$, $\angle B_1OA_1 = 2\angle B_1C_1A_1$, то легко находим, что $\angle B_1CA_1 = 60°$. Применив, наконец, теорему косинусов к треугольнику ABC, получаем, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB \iff AC^2 - 6AC - 40 = 0,$$

откуда $AC = 10$. $\square$

Ответ: $AC = 10$.

Задача 8. *Две окружности касаются внешним образом: друг друга в точке A, а третьей окружности — в точках B и C. Продолжение хорды AB первой окружности пересекает вторую окружность в точке D, продолжение хорды AC пересекает первую окружность в точке E, а продолжения хорд BE и CD — третью окружность в точках F и G соответственно. Найти BC, если $BF = 12$ и $BG = 15$.*

Доказательство. Докажем, что $BCGF$ — прямоугольник, тогда $BC = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
1) Докажем, что $BE \parallel CD$. Пусть l_a, l_b, l_c — общие касательные к двум окружностям, проведенные через точки A, B, C соответственно. Как известно, эти три прямые пересекаются в одной точке (обозначим ее через N). Кроме того, на прямой l_a возьмем произвольную точку K таким образом, чтобы точка A лежала между N и K. Из свойств вертикальных, вписанных углов, а также углов между касательной и хордой следуют равенства $\angle BEA = \angle BAN = \angle DAK = \angle DCA$, то есть $BE \parallel DC$.
2) Докажем, что $\angle BCD = 90^\circ = \angle CBE$. Пусть $\alpha = \angle CBN = \angle BCN$, $\beta = \angle ACN = \angle ADC = \angle ABE$, $\gamma = \angle ABN = \angle AEB = \angle ACD$. Тогда $\angle CBE = \alpha + \beta + \gamma = \angle BCD$, а так как $BE \parallel CD$, то $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$. $\square$

Ответ: $BC = 9$.