# Геометрия звездного неба

**_В.ПРОТАСОВ_**

НЕБО НАД ГОЛОВОЙ – САМЫЙ ДРЕВНИЙ УЧЕБник геометрии. Первые понятия, такие как точка и круг, – оттуда. Скорее даже не учебник, а задачник. В котором отсутствует страничка с ответами. Два круга одинакового размера – Солнце и Луна – движутся по небу, каждый со своей скоростью. Остальные объекты – светящиеся точки – движутся все вместе, словно они прикреплены к сфере, вращающейся со скоростью 1 оборот в 24 часа. Правда, среди них есть исключения – 5 точек движутся как им вздумается. Для них подобрали особое слово – «планета», по-гречески – «бродяга». Сколько человечество существует, оно пытается разгадать законы этого вечного движения. Первый прорыв произошел в III веке до н.э., когда греческие ученые, взяв на вооружение молодую науку – геометрию, смогли получить первые результаты об устройстве Вселенной. Об этом и пойдет речь.

Чтобы иметь некоторое представление о сложности задачи, рассмотрим такой пример. Представим себе светящийся шар диаметром 10 см, неподвижно висящий в пространстве. Назовем его $S$. Вокруг него на расстоянии чуть больше 10 метров обращается маленький шарик $Z$ диаметром 1 миллиметр, а вокруг $Z$ на расстоянии 6 см обращается совсем крохотный шарик $L$, его диаметр – четверть миллиметра. На поверхности среднего шарика $Z$ живут микроскопические существа. Они обладают неким разумом, но покидать пределы своего шарика не могут. Все, что они могут, – смотреть на два других шара – $S$ и $L$. Спрашивается, могут ли они узнать диаметры этих шаров и измерить расстояния до них? Сколько ни думай, дело, казалось бы, безнадежное. Мы нарисовали сильно уменьшенную модель Солнечной системы ($S$ – Солнце, $Z$ – Земля, $L$ – Луна).

Вот такая задача стояла перед древними астрономами. И они ее решили! Более 22 веков назад, не пользуясь ничем, кроме са́мой элементарной геометрии – на уровне 8 класса (свойства прямой и окружности, подобные треугольники и теорема Пифагора). И, конечно, наблюдая за Луной и за Солнцем.

Над решением трудились несколько ученых. Мы выделим двух. Это математик Эратосфен, измеривший радиус земного шара, и астроном Аристарх, вычисливший размеры Луны, Солнца и расстояния до них. Как они это сделали?

*Е.Н.Конева, М.В.Перепухов. Через тернии к звездам*

### Как измерили земной шар

То, что Земля не плоская, люди знали давно. Древние мореплаватели наблюдали, как постепенно меняется картина звездного неба: становятся видны новые созвездия, а другие, напротив, заходят за горизонт. Уплывающие вдаль корабли «уходят под воду», последними скрываются из вида верхушки их мачт. Кто первый высказал идею о шарообразности Земли, неизвестно. Скорее всего – пифагорейцы, считавшие шар совершеннейшей из фигур. Полтора века спустя Аристотель приводит несколько доказательств того, что Земля – шар. Главное из них: во время лунного затмения на поверхности Луны отчетливо видна тень от Земли, и эта тень круглая! С тех пор постоянно предпринимались попытки измерить радиус земного шара. Два простых способа изложены в упражнениях 1 и 2. Измерения, правда, получались неточными. Аристотель, например, ошибся более чем в полтора раза. Считается, что первым, кому удалось сделать это с высокой точностью, был греческий математик Эратосфен Киренский (276–194 до н. э.). Его имя теперь всем известно благодаря *решету Эра-*

*тосфена* – способу находить простые числа (рис.1). Если вычеркнуть из натурального ряда единицу, затем вычеркивать все четные числа, кроме первого (самого числа 2), затем все числа, кратные трем, кроме первого

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~

Рис. 1

из них (числа 3), и т.д., то в результате останутся одни простые числа. Среди современников Эратосфен был знаменит как крупнейший ученый-энциклопедист, занимавшийся не только математикой, но и географией, картографией и астрономией. Он долгое время возглавлял Александрийскую библиотеку – центр мировой науки того времени. Работая над составлением первого атласа Земли (речь, конечно, шла об известной к тому времени ее части), он задумал провести точное измерение земного шара. Идея была такова. В Александрии все знали, что на юге, в городе Сиена (современный Асуан), один день в году, в полдень, Солнце достигает зенита. Исчезает тень от вертикального шеста, на несколько минут освещается дно колодца. Происходит это в день летнего солнцестояния, 22 июня – день наивысшего положения Солнца на небе. Эратосфен направляет своих помощников[1] в Сиену, и те устанавливают, что ровно в полдень (по солнечным часам) Солнце находится точно в зените. Одновременно (как написано в первоисточнике: «в тот же час»), т.е. в полдень по солнечным часам, Эратосфен измеряет длину тени от вертикального шеста в Александрии. Получился треугольник $ABC$ ($AC$ – шест, $AB$ – тень, рис.2). Итак, солнечный луч в Сиене ($N$) перпендикулярен поверхности Земли, а значит, проходит через ее

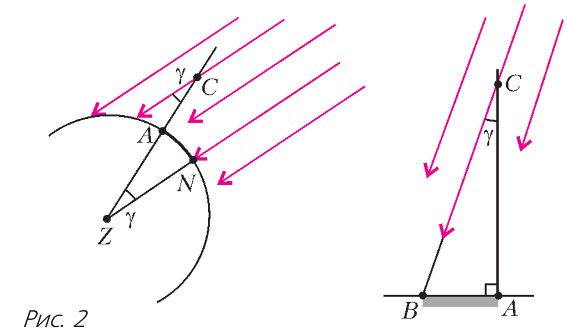


Рис. 2

центр – точку $Z$. Параллельный ему луч в Александрии ($A$) составляет угол $\gamma = \angle ACB$ с вертикалью. Пользуясь равенством накрест лежащих углов при параллельных, заключаем, что $\angle AZN = \gamma$. Если обозначить через $l$ длину окружности, а через $x$ длину ее дуги $AN$, то получаем пропорцию $\frac{l}{360^\circ} = \frac{x}{\gamma}$. Угол $\gamma$ в треугольнике $ABC$ Эратосфен измерил, получилось $7{,}2^\circ$. Величина $x$ – не что иное, как длина пути от Александрии до Сиены, примерно 800 км. Ее Эратосфен аккуратно вычисляет, исходя из среднего времени движения верблюжьих караванов, регулярно ходивших между двумя городами, а также используя данные *бематистов* – людей специальной профессии, измерявших расстояния шагами. Теперь осталось решить пропорцию $\frac{l}{360^\circ} = \frac{800}{7{,}2^\circ}$, получив длину окружности (т.е. длину земного меридиана) $l = 40000$ км. Тогда радиус Земли $R$ равен $l/(2\pi)$, это примерно 6400 км. То, что длина земного меридиана выражается столь круглым числом в 40000 км, не удивительно, если вспомнить, что единица длины в 1 метр и была введена (во Франции в конце XVIII века) как одна сорокамиллионная часть окружности Земли (по определению!). Эратосфен, конечно, использовал другую единицу измерения – *стадий* (около 200 м). Стадиев было несколько: египетский, греческий, вавилонский, и каким из них пользовался Эратосфен – неизвестно. Поэтому трудно судить наверняка о точности его измерения. Кроме того, неизбежная ошибка возникала в силу географического положения двух городов. Эратосфен рассуждал так: если города находятся на одном меридиане (т.е. Александрия расположена в точности к северу от Сиены), то полдень в них наступает одновременно. Поэтому, сделав измерения во время наивысшего положения Солнца в каждом городе, мы должны получить правильный результат. Но на самом деле Александрия и Сиена – далеко не на одном меридиане. Сейчас в этом легко убедиться, взглянув на карту, но у Эратосфена такой возможности не было, он как раз и работал над составлением первых карт. Поэтому его метод (абсолютно верный!) привел к ошибке в определении радиуса Земли. Тем не менее, многие исследователи уверены, что точность измерения Эратосфена была высока и что он ошибся менее чем на 2%. Улучшить этот результат человечество смогло только через 2 тысячи лет, в середине XIX века. Над этим трудилась группа ученых во Франции и экспедиция В.Я.Струве в России. Даже в эпоху великих географических открытий, в XVI веке, люди не смогли достичь результата Эратосфена и пользовались неверным значением длины земной окружности в 37000 км. Ни Колумб, ни Магеллан не знали, каковы истинные размеры Земли и какие расстояния им придется преодолевать. Они-то считали, что длина экватора на 3 тысячи км меньше, чем на самом деле. Знали бы – может, и не поплыли бы.

В чем причина столь высокой точности метода Эратосфена (конечно, если он пользовался нужным *стадием*)? До него измерения были *локальными*, на расстояниях, обозримых человеческим глазом, т.е. не более 100 км. Таковы, например, способы в упражнениях 1 и 2. При этом неизбежны ошибки из-за рельефа местности, атмосферных явлений и т.д. Чтобы добиться большей точности, нужно проводить измерения *глобально*, на расстояниях, сравнимых с радиусом Земли. Расстояние в 800 км между Александрией и Сиеной оказалось вполне достаточным.

**Упражнения**

**1.** Как вычислить радиус Земли по следующим данным: с горы высотой 500 м просматриваются окрестности на расстоянии 80 км?

**2.** Как вычислить радиус Земли по следующим данным:

[1] *В некоторых источниках сообщается легенда о том, что одним из них был друг Эратосфена – великий Архимед.*

корабль высотой 20 м, отплыв от берега на 16 км, полностью исчезает из вида?

**3.** Два друга – один в Москве, другой – в Туле, берут по метровому шесту и ставят их вертикально. В момент, в течение дня, когда тень от шеста достигает наименьшей длины, каждый из них измеряет длину тени. В Москве получилось $a$ см, а в Туле – $b$ см. Выразите радиус Земли через $a$ и $b$. Города расположены на одном меридиане на расстоянии 185 км.

Как видно из упражнения 3, опыт Эратосфена можно проделать и в наших широтах, где Солнце никогда не бывает в зените. Правда, для этого нужны две точки обязательно на одном меридиане. Если же повторить опыт Эратосфена для Александрии и Сиены, и при этом сделать измерения в этих городах одновременно (сейчас для этого есть технические возможности), то мы получим верный ответ, при этом будет не важно, на каком меридиане находится Сиена (почему?).

## Как измерили Луну и Солнце. Три шага Аристарха

Греческий остров Самос в Эгейском море – теперь глухая провинция. Сорок километров в длину, восемь – в ширину. На этом крохотном острове в разное время родились три величайших гения – математик Пифагор, философ Эпикур и астроном Аристарх. Про жизнь Аристарха Самосского известно мало. Даты жизни приблизительны: родился около 310 до н.э., умер около 230 до н.э. Как он выглядел, мы не знаем, ни одного изображения не сохранилось (современный памятник Аристарху в греческом городе Салоники – лишь фантазия скульптора). Много лет провел в Александрии, где работал в библиотеке и в обсерватории. Главное его достижение – книга «О величинах и расстояниях Солнца и Луны», – по единодушному мнению историков, является настоящим научным подвигом. В ней он вычисляет радиус Солнца, радиус Луны и расстояния от Земли до Луны и до Солнца. Сделал он это в одиночку, пользуясь очень простой геометрией и всем известными результатами наблюдений за Солнцем и Луной. На этом Аристарх не останавливается, он делает несколько важнейших выводов о строении Вселенной, которые намного опередили свое время. Не случайно его назвали впоследствии «Коперником античности».

*Памятник Аристарху Самосскому в Салониках*

Вычисление Аристарха можно условно разбить на три шага. Каждый шаг сводится к простой геометрической задаче. Первые два шага совсем элементарны, третий – чуть посложнее. В геометрических построениях мы будем обозначать через $Z$, $S$ и $L$ центры Земли, Солнца и Луны соответственно, а через $R$, $R_s$ и $R_l$ – их радиусы. Все небесные тела будем считать шарами, а их орбиты – окружностями, как и считал сам Аристарх (хотя, как мы теперь знаем, это не совсем так). Мы начинаем с первого шага, и для этого немного понаблюдаем за Луной.

### Шаг 1. Во сколько раз Солнце дальше, чем Луна?

Как известно, Луна светит отраженным солнечным светом. Если взять шар и посветить на него со стороны большим прожектором, то в любом положении освещенной окажется ровно половина поверхности шара. Граница освещенной полусферы – окружность, лежащая в плоскости, перпендикулярной лучам света. Таким образом, Солнце всегда освещает ровно половину поверхности Луны. Видимая нам форма Луны зависит от того, как расположена эта освещенная половина. При *новолунии*, когда Луна вовсе не видна на небе, Солнце освещает ее обратную сторону. Затем освещенная полусфера постепенно поворачивается в сторону Земли. Мы начинаем видеть тонкий серп, затем – месяц («растущая Луна»), далее – полукруг (эта фаза Луны называется «квадратурой»). Затем день ото дня (вернее, ночь от ночи) полукруг дорастает до полной Луны. Потом начинается обратный процесс: освещенная полусфера от нас отворачивается. Луна «стареет», постепенно превращаясь в месяц, повернутый к нам левой стороной, подобно букве «С», и, наконец, в ночь новолуния исчезает. Период от одного новолуния до другого длится примерно четыре недели. За это время Луна совершает полный оборот вокруг Земли. От новолуния до половины Луны проходит четверть периода, отсюда и название «квадратура».

Замечательная догадка Аристарха состояла в том, что при квадратуре солнечные лучи, освещающие половину Луны, перпендикулярны прямой, соединяющей Луну с Землей. Таким образом, в треугольнике $ZLS$ угол при вершине $L$ – прямой (рис.3). Если теперь измерить угол $LZS$, обозначим его через $\alpha$, то получим, что $\frac{ZL}{ZS} = \cos\alpha$. Для простоты мы считаем, что наблюдатель находится в центре Земли. Это несильно повлияет на результат, поскольку расстояния от Земли до Луны и до Солнца значительно превосходят радиус Земли.

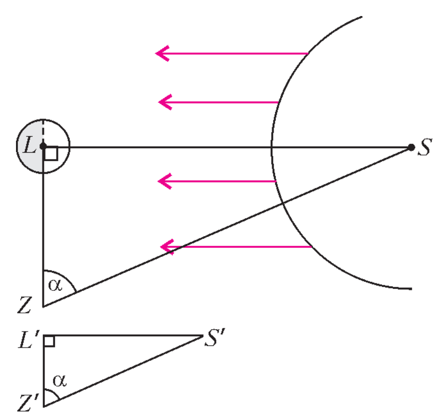


*Рис. 3*

Итак, измерив угол $\alpha$ между лучами $ZL$ и $ZS$ во время квадратуры, Аристарх вычисляет отношение расстояний до Луны и до Солнца. Как одновременно застать Солнце и Луну на небосводе? Это можно сделать ранним утром. Сложность возникает по другому, неожиданному, поводу. Во времена Аристарха не было косинусов. Первые понятия тригонометрии появятся позже, в работах Аполлония и Архимеда. Но Аристарх знал, что такое подобные треугольники, и этого было достаточно. Начертив маленький прямоугольный треугольник $Z'L'S'$ с тем же острым углом $\alpha = \angle L'Z'S'$ и измерив его стороны, находим, что $\frac{ZL}{ZS} = \frac{Z'L'}{Z'S'}$, и это отношение примерно равно $\frac{1}{400}$. Получается, что Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна. Эту константу – отношение расстояний от Земли до Солнца и от Земли до Луны – мы будем обозначать буквой $\kappa$. Итак, мы нашли, что $\kappa = 400$.

### Шаг 2. Во сколько раз Солнце больше Луны?

Для того чтобы найти отношение радиусов Солнца и Луны, Аристарх привлекает солнечные затмения (рис.4). Они происходят, когда Луна загораживает Солнце. При частичном, или, как говорят астрономы, *частном*, затмении Луна лишь проходит по диску Солнца, не закрывая его полностью. Порой такое

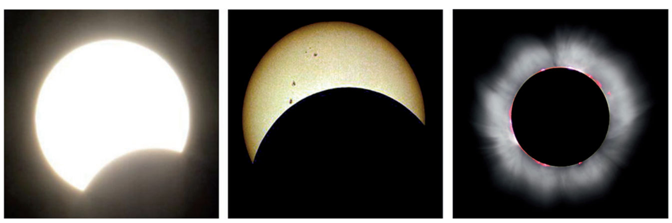

Рис. 4

затмение даже нельзя разглядеть невооруженным глазом, Солнце светит как в обычный день. Лишь сквозь сильное затемнение, например, закопченое стекло, видно, как часть солнечного диска закрыта черным кругом. Гораздо реже происходит полное затмение, когда Луна на несколько минут полностью закрывает солнечный диск. В это время становится темно, на небе появляются звезды. Затмения наводили ужас на древних людей, считались предвестниками трагедий. Солнечное затмение наблюдается по-разному в разных частях Земли. Во время полного затмения на поверхности Земли возникает тень от Луны – круг, диаметр которого не превосходит 270 км. Лишь в тех районах земного шара, по которым проходит эта тень, можно наблюдать полное затмение. Поэтому в одном и том же месте полное затмение происходит крайне редко – в среднем раз в 200–300 лет. Аристарху повезло – он смог наблюдать полное солнечное затмение собственными глазами. На безоблачном небе Солнце постепенно начало тускнеть и уменьшаться в размерах, установились сумерки. На несколько мгновений Солнце исчезло. Потом проглянул первый луч света, солнечный диск стал расти, и вскоре Солнце засветило в полную силу. Почему затмение длится столь короткое время? Аристарх отвечает: причина в том, что Луна имеет те же видимые размеры на небе, что и Солнце. Что это значит? Проведем плоскость через центры Земли, Солнца и Луны. Получившееся сечение изображено на рисунке 5,*а*. Угол между касательными, проведенными из точки $Z$ к окружности Луны, называется *угловым размером* Луны, или ее *угловым диаметром*. Так же

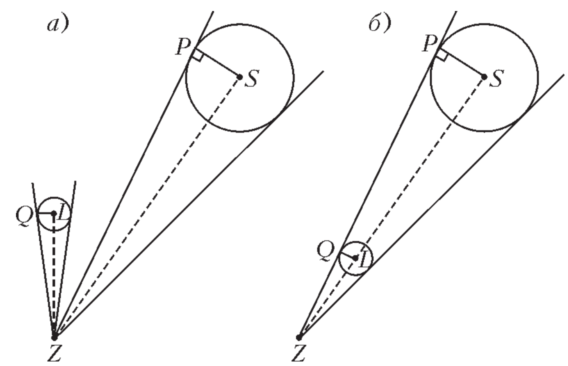


Рис. 5

определяется угловой размер Солнца. Если угловые диаметры Солнца и Луны совпадают, то они имеют одинаковые видимые размеры на небе, а при затмении Луна действительно полностью загораживает Солнце (рис.5,*б*), но лишь на мгновение, когда совпадут лучи $ZL$ и $ZS$. На фотографии полного солнечного затмения (см. рис.4) ясно видно равенство размеров.

Вывод Аристарха оказался поразительно точен! В реальности средние угловые диаметры Солнца и Луны отличаются всего на 1,5%. Мы вынуждены говорить о средних диаметрах, поскольку они меняются в течение года, так как планеты движутся не по окружностям, а по эллипсам.

Соединив центр Земли $Z$ с центрами Солнца $S$ и Луны $L$, а также с точками касания $P$ и $Q$, получим два прямоугольных треугольника $ZSP$ и $ZLQ$ (см. рис. 5,*а*). Они подобны, поскольку у них есть пара равных острых углов $\frac{\beta}{2}$. Следовательно, $\frac{R_s}{R_l} = \frac{SP}{LQ} = \frac{ZS}{ZL}$. Таким образом, *отношение радиусов Солнца и Луны равно отношению расстояний от их центров до центра Земли*. Итак, $\frac{R_s}{R_l} = \kappa = 400$. Несмотря на то, что их видимые размеры равны, Солнце оказалось больше Луны в 400 раз!

Равенство угловых размеров Луны и Солнца – счастливое совпадение. Оно не вытекает из законов механики. У многих планет Солнечной системы есть спутники: у Марса их два, у Юпитера – четыре (и еще несколько десятков мелких), и все они имеют разные угловые размеры, не совпадающие с солнечным.

Теперь мы приступаем к решающему и самому сложному шагу.

### Шаг 3. Вычисление размеров Солнца и Луны и расстояний до них

Итак, нам известно отношение размеров Солнца и Луны и отношение их расстояний до Земли. Эта информация *относительна*: она восстанавливает картину окружающего мира лишь с точностью до подобия. Можно удалить Луну и Солнце от Земли в 10 раз, увеличив во столько же раз их размеры, и видимая с Земли картина останется такой же. Чтобы найти реальные размеры небесных тел, надо соотнести их с каким-то известным размером. Но из всех астрономических величин Аристарху пока известен только радиус[2] земного шара $R = 6400$ км. Поможет ли это? Хоть в каком-то из видимых явлений, происходящих на небе, появляется радиус Земли? Не случайно говорят «небо и земля», имея в виду две несовместные вещи. И все же такое явление есть. Это – лунное затмение. С его помощью, применив довольно хитроумное геометрическое построение, Аристарх вычисляет отношение радиуса Солнца к радиусу Земли, и цепь замыкается: теперь мы одновременно находим радиус Луны, радиус Солнца, а заодно и расстояния от Луны и от Солнца до Земли.

При лунном затмении Луна уходит в тень Земли. Спрятавшись за Землю, Луна лишается солнечного света, и, таким образом, перестает светить. Она не исчезает из вида полностью, поскольку небольшая часть солнечного света рассеивается земной атмосферой и доходит до Луны в обход Земли. Луна темнеет, приобретая красноватый оттенок (через атмосферу лучше всего проходят красные и оранжевые лучи). На лунном диске при этом отчетливо видна тень от Земли (рис.6). Круглая форма тени еще раз подтверждает шарообразность Земли.

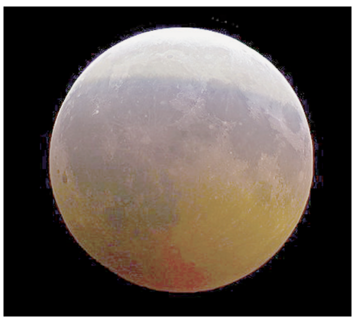

Рис. 6

Аристарха же интересовал размер этой тени. Для того, чтобы определить радиус круга земной тени (мы сделаем это по фотографии на рисунке 6), достаточно решить простое упражнение.

**Упражнение 4.** На плоскости дана дуга окружности. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок, равный ее радиусу.

Выполнив построение, находим, что радиус земной тени примерно в $t = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ раза больше радиуса Луны. Обратимся теперь к рисунку 7. Серым цветом закрашена область земной тени, в которую попадает Луна при затмении. Предположим, что центры окружностей $S$, $Z$ и $L$ лежат на одной прямой. Проведем диаметр Луны $M_1M_2$, перпендикулярный прямой $LS$. Продолжение этого диаметра пересекает общие касательные окружностей Солнца и Земли в точках $D_1$ и $D_2$.

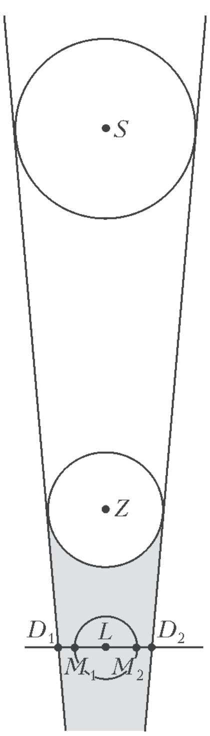


Рис. 7

[2] *Неизвестно, знал ли Аристарх об измерении Эратосфена или пользовался другим значением радиуса Земли. Это не так важно, поскольку он брал радиус Земли в качестве единицы длины.*

Тогда отрезок $D_1D_2$ приближенно равен диаметру тени Земли. Мы пришли к следующей задаче.

**Задача 1.** *Даны три окружности с центрами $S$, $Z$ и $L$, лежащими на одной прямой. Отрезок $D_1D_2$, проходящий через $L$, перпендикулярен прямой $SL$, а его концы лежат на общих внешних касательных к первой и второй окружностям. Известно, что отношение отрезка $D_1D_2$ к диаметру третьей окружности равно $t$, а отношение диаметров первой и третьей окружности равно $\frac{ZS}{ZL} = \kappa$. Найдите отношение диаметров первой и второй окружностей.*

Если решить эту задачу, то будет найдено отношение радиусов Солнца и Земли. Значит, будет найден радиус Солнца, а с ним и Луны. Но решить ее не удастся. Можете попробовать – в задаче не достает одного данного. Например, угла между общими внешними касательными к первым двум окружностям. Но даже если этот угол был бы известен, решение будет использовать тригонометрию, которую Аристарх не знал (мы формулируем соответствующую задачу в упражнении 6). Он находит более простой выход. Проведем диаметр $A_1A_2$ первой окружности и диаметр $B_1B_2$ второй, оба – параллельные отрезку $D_1D_2$. Пусть $C_1$ и $C_2$ – точки пересечения отрезка $D_1D_2$ с прямыми $A_1B_1$ и $A_2B_2$ соответственно (рис.8). Тогда в качестве диаметра земной тени возьмем отрезок $C_1C_2$ вместо отрезка $D_1D_2$. Стоп, стоп! Что значит, «возьмем один отрезок вместо другого»? Они же не равны! Отрезок $C_1C_2$ лежит внутри отрезка $D_1D_2$, значит, $C_1C_2 < D_1D_2$. Да, отрезки разные, но они *почти равны*. Дело в том, что расстояние от Земли до Солнца во много раз больше диаметра Солнца (примерно в 215 раз). Поэтому расстояние $ZS$ между центрами первой и второй окружности значительно превосходит их диаметры. Значит, угол между общими внешними касательными к этим окружностям близок к нулю (в реальности он примерно $0{,}5°$), т.е. касательные «почти параллельны». Если бы они были в точности параллельны, то точки $A_1$ и $B_1$ совпадали бы с точками касания, следовательно, точка $C_1$ совпала бы с $D_1$, а $C_2$ с $D_2$, и значит, $C_1C_2 = D_1D_2$. Таким образом, отрезки $C_1C_2$ и $D_1D_2$ почти равны. Интуиция и здесь не подвела Аристарха: на самом деле отличие между длинами отрезков составляет менее сотой доли процента! Это – ничто по сравнению с возможными погрешностями измерений. Убрав теперь лишние линии, включая окружности и их общие касательные, приходим к такой задаче.

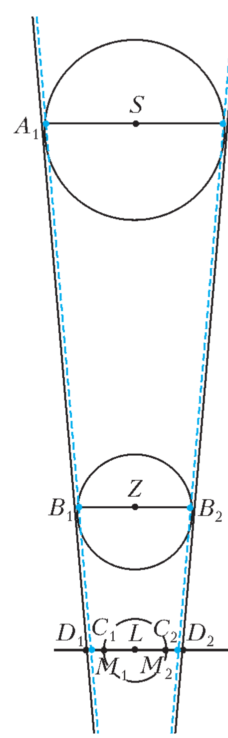


Рис. 8

**Задача 1′.** *На боковых сторонах $A_1C_1$ и $A_2C_2$*

*трапеции $A_1A_2C_2C_1$ взяты точки $B_1$ и $B_2$ так, что отрезок $B_1B_2$ параллелен основаниям. Пусть S, Z и L – середины отрезков $A_1A_2$, $B_1B_2$ и $C_1C_2$ соответственно. На основании $C_1C_2$ лежит отрезок $M_1M_2$ с серединой L. Известно, что* $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL} = \kappa$ *и* $\frac{C_1C_2}{M_1M_2} = t$. *Найдите* $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$.

**Решение.** Так как $\frac{A_1A_2}{M_1M_2} = \frac{ZS}{ZL}$, то $\frac{A_2S}{M_1L} = \frac{ZS}{ZL}$, а значит, треугольники $A_2SZ$ и $M_1LZ$ подобны с коэффициентом $\frac{SZ}{LZ} = \kappa$. Следовательно, $\angle A_2SZ = \angle M_1LZ$, и поэтому точка $Z$ лежит на отрезке $M_1A_2$. Аналогично, $Z$ лежит на отрезке $M_2A_1$ (рис.9). Так как $C_1C_2 = t \cdot M_1M_2$ и $M_1M_2 = \frac{1}{\kappa}A_1A_2$, то $C_1C_2 = \frac{t}{\kappa}A_1A_2$.

Далее, треугольники $A_2C_2M_1$ и $A_2B_2Z$ подобны. Их коэффициент подобия равен

$$\frac{M_1A_2}{ZA_2} = 1 + \frac{ZM_1}{ZA_2} = 1 + \frac{ZL}{ZS} = 1 + \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa+1}{\kappa}.$$

Следовательно,

$$C_2M_1 = \frac{\kappa+1}{\kappa}B_2Z = \frac{\kappa+1}{2\kappa}B_1B_2.$$

С другой стороны,

$$C_2M_1 = C_2L + LM_1 = \frac{1}{2}C_1C_2 + \frac{1}{\kappa}SA_2 = \frac{t}{2\kappa}A_1A_2 + \frac{1}{2\kappa}A_1A_2.$$

Значит, $\frac{\kappa+1}{2\kappa}B_1B_2 = \frac{t+1}{2\kappa}A_1A_2$. Из этого равенства сразу получаем, что $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{\kappa+1}{t+1}$.

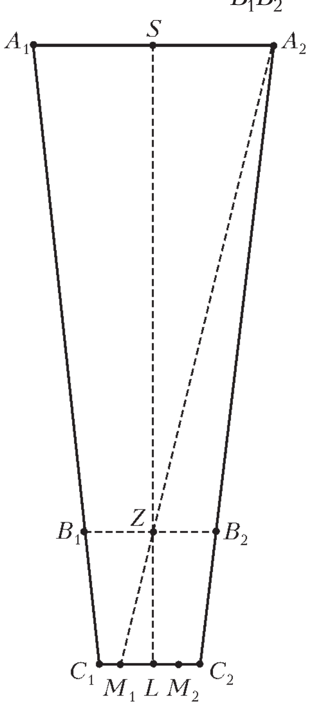

*Рис. 9*

Итак, отношение диаметров Солнца и Земли равно $\frac{\kappa+1}{t+1}$, а Луны и Земли равно $\frac{\kappa+1}{\kappa(t+1)}$. Подставляя известные нам величины $\kappa = 400$ и $t = \frac{8}{3}$, получаем, что Луна примерно в 3,66 раза меньше Земли, а Солнце в 109 раз больше Земли. Так как радиус Земли $R$ нам известен, находим радиус Луны $R_l = R/3{,}66$ и радиус Солнца $R_s = 109R$.

Теперь расстояния от Земли до Луны и до Солнца вычисляются в один шаг, это может быть сделано с помощью углового диаметра. Угловой диаметр β Солнца и Луны составляет примерно полградуса (если быть совсем точным, $0{,}53°$). Как древние астрономы его измеряли, об этом речь впереди. Опустив касательную $ZQ$ на окружность Луны, получаем прямоугольный треугольник $ZLQ$ с острым углом $\beta/2$ (рис.10).

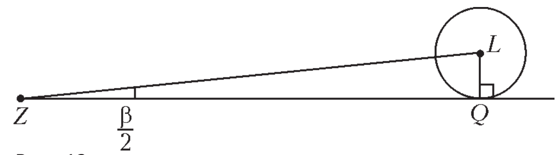

*Рис. 10*

Из него находим $ZL = \frac{1}{\sin(\beta/2)}R_l$, что примерно равно $215R_l$, или $62R$. Аналогично, расстояние до Солнца равно $215R_s = 23455R$.

Всё. Размеры Солнца и Луны и расстояния до них найдены.

**Упражнения**

**5.** Докажите, что прямые $A_1B_1$, $A_2B_2$ и две общие внешние касательные к первой и второй окружностям (см. рис.8) пересекаются в одной точке.

**6.** Решите задачу 1, если дополнительно известен угол между касательными между первой и второй окружностью.

**7.** Солнечное затмение может наблюдаться в одних частях земного шара и не наблюдаться других. А лунное затмение?

**8.** Докажите, что солнечное затмение может наблюдаться только во время новолуния, а лунное затмение – только во время полнолуния.

**9.** Что происходит на Луне, когда на Земле происходит лунное затмение?

## О пользе ошибок

На самом деле все было несколько сложнее. Геометрия только формировалась, и многие привычные для нас еще с восьмого класса школы вещи были в то время совсем не очевидны. Аристарху потребовалось написать целую книгу, чтобы изложить то, что мы изложили на трех страницах. И с экспериментальными измерениями тоже все было непросто. Во-первых, Аристарх ошибся с измерением диаметра земной тени во время лунного затмения, получив отношение $t = 2$ вместо $t = 2\frac{2}{3}$. Кроме того, он, вроде бы, исходил из неверного значения угла β – углового диаметра Солнца, считая его равным $2°$. Но эта версия спорная: Архимед в своем трактате «Псаммит» пишет, что, напротив, Аристарх пользовался почти правильным значением в $0{,}5°$. Однако самая ужасная ошибка произошла на первом шаге, при вычислении параметра κ – отношения расстояний от Земли до Солнца и до Луны. Вместо $\kappa = 400$ у Аристарха получилось $\kappa = 19$. Как можно было ошибиться более чем в 20 раз? Обратимся еще раз к шагу 1, рисунок 3. Для того чтобы найти отношение $\kappa = ZS/ZL$, Аристарх измерил угол $\alpha = \angle SZL$, и тогда $\kappa = \frac{1}{\cos\alpha}$. Например, если угол α был бы равен $60°$, то мы получили бы $\kappa = 2$, и Солнце было бы вдвое дальше от Земли, чем Луна. Но результат измерения оказался неожиданным: угол α получался почти прямым. Это означало, что катет $ZS$ во много раз превосходит $ZL$. У Аристарха получилось $\alpha = 87°$, и тогда $\cos\alpha = \frac{1}{19}$ (напомним, что все вычисления у нас – приближенные). Истинное значение угла $\alpha = \left(89\frac{6}{7}\right)^\circ$, и $\cos\alpha = \frac{1}{400}$. Так погрешность измерения менее чем в 3° привела к ошибке в 20 раз! Завершив вычисления, Аристарх приходит к выводу, что радиус Солнца равен 6,5 радиусов Земли (вместо 109).

Ошибки были неизбежны, учитывая несовершенные измерительные приборы того времени. Важнее то, что метод оказался правильным. Вскоре (по историческим меркам, т.е. примерно через 100 лет) выдающийся астроном античности Гиппарх (190 – ок. 120 до н.э.) устранит все неточности и, следуя методу Аристарха, вычислит правильные размеры Солнца и Луны. Возможно, ошибка Аристарха оказалась в конце концов даже полезной. До него господствовало мнение, что Солнце и Луна либо вовсе имеют одинаковые размеры (как и кажется земному наблюдателю), либо отличаются несильно. Даже отличие в 19 раз удивило современников. Поэтому не исключено, что, найди Аристарх правильное отношение $\kappa = 400$, в это никто бы не поверил, а может быть, и сам ученый отказался бы от своего метода, сочтя результат несуразным. Известный принцип гласит, что геометрия – это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах. Перефразируя, можно сказать, что наука в целом – это искусство делать верные выводы из неточных, или даже ошибочных, наблюдений. И Аристарх такой вывод сделал. За 17 веков до Коперника он понял, что в центре мира находится не Земля, а Солнце. Так впервые появилась гелиоцентрическая модель и понятие Солнечной системы.

### Что в центре?

Господствовавшее в Древнем Мире представление об устройстве Вселенной, знакомое нам по урокам истории, заключалось в том, что в центре мира – неподвижная Земля, вокруг нее по круговым орбитам вращаются 7 планет, включая Луну и Солнце (которое тоже считалось планетой). Завершается все небесной сферой с прикрепленными к ней звездами. Сфера вращается вокруг Земли, делая полный оборот за 24 часа. Со временем в эту модель многократно вносились исправления. Так, стали считать, что небесная сфера неподвижна, а Земля вращается вокруг своей оси. Затем стали исправлять траектории движения планет: круги заменили циклоидами, т.е. линиями, которые описывают точки окружности при ее движении по другой окружности (об этих замечательных линиях можно прочитать в книгах Г.Н.Бермана «Циклоида», А.И.Маркушевича «Замечательные кривые», а также в «Кванте»: статья С.Верова «Тайны циклоиды» №8, 1975, и статья С.Г.Гиндикина «Звездный век циклоиды», №6, 1985). Циклоиды лучше согласовывались с результатами наблюдений, в частности, объясняли «попятные» движения планет. Это – *геоцентрическая* система мира, в центре которой – Земля («гея»). Во II веке она приняла окончательный вид в книге «Альмагест» Клавдия Птолемея (87–165), выдающегося греческого астронома, однофамильца египетских царей. Со временем некоторые циклоиды усложнялись, добавлялись все новые промежуточные окружности. Но в целом система Птолемея господствовала около полутора тысячелетий, до XVI века, до открытий Коперника и Кеплера. Поначалу геоцентрической модели придерживался и Аристарх. Однако, вычислив, что радиус Солнца в 6,5 раз больше радиуса Земли, он задал простой вопрос: почему такое большое Солнце должно вращаться вокруг такой маленькой Земли? Ведь если радиус Солнца больше в 6,5 раз, то его объем больше почти в 275 раз! Значит, в центре мира должно находиться Солнце. Вокруг него вращаются 6 планет, включая Землю.[3] А седьмая планета, Луна, вращается вокруг Земли. Так появилась *гелиоцентрическая* система мира («гелиос» – Солнце). Уже сам Аристарх отмечал, что такая модель лучше объясняет видимое движение планет по круговым орбитам, лучше согласуется с результатами наблюдений. Но ее не приняли ни ученые, ни официальные власти. Аристарх был обвинен в безбожии и подвергся преследованиям. Из всех астрономов античности только Селевк стал сторонником новой модели. Больше ее не принял никто, по крайней мере, у историков нет твердых сведений на этот счет. Даже Архимед и Гиппарх, почитавшие Аристарха и развившие многие его идеи, не решились поставить Солнце в центр мира. Почему?

### Почему мир не принял гелиоцентрической системы?

Как же получилось, что в течении 17 веков ученые не принимали простой и логичной системы мира, предложенной Аристархом? И это несмотря на то, что официально признанная геоцентрическая система Птолемея часто давала сбои, не согласуясь с результатами наблюдений за планетами и за звездами. Приходилось добавлять все новые окружности (так называемые *вложенные циклы*) для «правильного» описания движения планет. Самого Птолемея трудности не пугали, он писал: «К чему удивляться сложному движению небесных тел, если их сущность нам неизвестна?» Однако уже к XIII веку этих окружностей накопилось 75! Модель стала столь громоздкой, что начали раздаваться осторожные возражения: неужели мир в самом деле устроен так сложно? Широко известен случай с Альфонсом X (1226–1284), королем Кастилии и Леона, государства, занимавшего часть современной Испании. Он, покровитель наук и искусств, собравший при своем дворе пятьдесят лучших астрономов мира, на одной из научных бесед

[3] *Именно шесть, а не девять, поскольку Уран, Нептун и Плутон были открыты гораздо позже. Совсем недавно, 13 сентября 2006 года, по решению Международного астрономического союза (IAU) Плутон лишился статуса планеты. Так что планет в Солнечной системе теперь восемь.*

обмолвился, что «если бы при сотворении мира Господь оказал мне честь и спросил моего совета, многое было бы устроено проще». Подобная дерзость не прощалась даже королям: Альфонс был низложен и отправлен в монастырь.[4] Но сомнения остались. Часть из них можно было бы разрешить, поставив Солнце в центр Вселенной и приняв систему Аристарха. Его труды были хорошо известны. Однако еще много веков никто из ученых не решался на такой шаг. Причины были не только в страхе перед властями и официальной церковью, которая считала теорию Птолемея единственно верной. И не только в инертности человеческого мышления: не так-то просто признать, что наша Земля – не центр мира, а лишь рядовая планета. Все-таки для настоящего ученого ни страх, ни стереотипы – не препятствия на пути к истине. Гелиоцентрическая система отвергалась по вполне научным, можно даже сказать, геометрическим причинам. Если допустить, что Земля вращается вокруг Солнца, то ее траектория – окружность с радиусом, равным расстоянию от Земли до Солнца. Как мы знаем, это расстояние равно 23455 радиусов Земли, т.е. более 150 миллионов километров. Значит, Земля в течение полугода перемещается на 300 миллионов километров. Гигантская величина! Но картина звездного неба для земного наблюдателя при этом остается такой же. Земля то приближается, то удаляется от звезд на 300 миллионов километров, но ни видимые расстояния между звездами (например, форма созвездий), ни их яркость не меняются. Это означает, что расстояния до звезд должны быть еще в несколько тысяч раз больше, т.е. небесная сфера должна иметь совершенно невообразимые размеры! Это, между прочим, осознавал и сам Аристарх, который писал в своей книге: «Объем сферы неподвижных звезд во столько раз больше объема сферы с радиусом Земля–Солнце, во сколько раз объем последней больше объема земного шара», т.е. по Аристарху выходило, что расстояние до звезд равно $(23455)^2 R$, это более 3,5 триллионов километров. В реальности расстояние от Солнца до ближайшей звезды еще примерно в 11 раз больше. (В модели, которую мы представили в самом начале, когда расстояние от Земли до Солнца равно 10 м, расстояние до ближайшей звезды равно … 2700 километров!) Вместо компактного и уютного мира, в центре которого находится Земля и который помещается внутри относительно небольшой небесной сферы, Аристарх нарисовал бездну. И эта бездна испугала всех.

## Венера, Меркурий и невозможность геоцентрической системы

Между тем невозможность геоцентрической системы мира, с круговыми движениями всех планет вокруг Земли, может быть установлена с помощью простой геометрической задачи.

[4] *Истинной причиной опалы короля Альфонса была, видимо, обычная борьба за власть, но его ироничное замечание об устройстве мира послужило веским поводом для его недругов.*

**Задача 2.** *На плоскости даны две окружности с общим центром O, по ним равномерно движутся две точки: точка M по одной окружности и точка V по другой. Докажите, что либо они двигаются в одном направлении с одинаковой угловой скоростью, либо в некоторый момент времени угол $\angle MOV$ тупой.*

**Решение.** Если точки движутся в одном направлении с разными скоростями, то через некоторое время лучи $OM$ и $OV$ окажутся сонаправленными. Далее угол $\angle MOV$ начинает монотонно возрастать до следующего совпадения, т.е. до $360°$. Следовательно, в некоторый момент он равен $180°$. Случай, когда точки движутся в разных направлениях, рассматривается так же.

**Теорема.** *Ситуация, при которой все планеты Солнечной системы равномерно вращаются вокруг Земли по круговым орбитам, невозможна.*

**Доказательство.** Пусть $O$ – центр Земли, $M$ – центр Меркурия, а $V$ – центр Венеры. Согласно многолетним наблюдениям, у Меркурия и Венеры разные периоды обращения, а угол $\angle MOV$ никогда не превосходит $76°$. В силу результата задачи 2 теорема доказана.

Конечно, древние греки неоднократно встречались с подобными парадоксами. Именно поэтому, чтобы спасти геоцентрическую модель мира, они заставили планеты двигаться не по окружностям, а по циклоидам.

Доказательство теоремы не совсем честно, поскольку Меркурий и Венера вращаются не в одной плоскости, как в задаче 2, а в разных. Хотя плоскости их орбит почти совпадают: угол между ними – всего несколько градусов. В упражнении 10 мы предлагаем вам устранить этот недостаток и решить аналог задачи 2 для точек, вращающихся в разных плоскостях. Другое возражение: может быть, угол $MOV$ бывает тупым, но мы этого не видим, поскольку на Земле в это время день? Принимаем и это. В упражнении 11 нужно доказать, что для *трех* вращающихся радиусов всегда настанет момент времени, когда они будут образовывать друг с другом тупые углы. Если на концах радиусов – Меркурий, Венера и Солнце, то в этот момент времени Меркурий и Венера будут видны на небе, а Солнце – нет, т.е. на земле будет ночь. Но должны предупредить: упражнения 10 и 11 значительно сложнее задачи 2. Наконец, в упражнении 12 мы предлагаем вам, ни много ни мало, вычислить расстояние от Венеры до Солнца и от Меркурия до Солнца (они, конечно, вращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли). Убедитесь сами, насколько это просто, после того, как мы узнали метод Аристарха.

### Упражнения

**10.** В пространстве даны две окружности с общим центром $O$, по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся две точки: точка $M$ по одной окружности и точка $V$ по другой. Докажите, что в некоторый момент угол $MOV$ тупой.

**11.** На плоскости даны три окружности с общим центром $O$, по ним равномерно с разными угловыми скоростями движутся три точки. Докажите, что в некоторый момент все три угла между лучами с вершиной $O$, направленными в данные точки, тупые.

**12.** Известно, что максимальное угловое расстояние между Венерой и Солнцем, т.е. максимальный угол между лучами, направленными с Земли к центрам Венеры и Солнца, равно

$48°$. Найдите радиус орбиты Венеры. То же – для Меркурия, если известно, что максимальное угловое расстояние между Меркурием и Солнцем равно $28°$.

## Последний штрих: измерение угловых размеров Солнца и Луны

Следуя шаг за шагом рассуждениям Аристарха, мы упустили лишь один аспект: как измерялся угловой диаметр Солнца? Сам Аристарх этого не делал, пользуясь измерениями других астрономов (по-видимому, не совсем верными). Напомним, что радиусы Солнца и Луны он смог вычислить, не привлекая их угловые диаметры. Посмотрите еще раз на шаги 1, 2 и 3: нигде значение углового диаметра не используется! Он нужен только для вычисления расстояний до Солнца и до Луны. Попытка определить угловой размер «на глазок» успеха не приносит. Если попросить несколько человек оценить угловой диаметр Луны, большинство назовут угол от 3 до 5 градусов, что в разы больше истинного значения. Сказывается обман зрения: ярко-белая Луна на фоне темного неба кажется массивной. Первым, кто провел математически строгое измерение углового диаметра Солнца и Луны, был Архимед (287 – 212 до н.э.) Он изложил свой метод в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок»). Сложность задачи он осознавал: «Получить точное значение этого угла – дело нелегкое, потому что ни глаз, ни руки, ни приборы, при помощи которых производится отсчет, не обеспечивают достаточной точности». Поэтому Архимед не берется вычислить точное значение углового диаметра Солнца, он лишь оценивает его сверху и снизу. Он помещает круглый цилиндр на конце длинной линейки, напротив глаза наблюдателя. Линейка направляется на Солнце, и цилиндр придвигается к глазу до тех пор, пока он не заслонит собой Солнце полностью. Затем наблюдатель уходит, а на конце линейки отмечается отрезок $MN$, равный размеру человеческого зрачка (рис.11). Тогда угол $\alpha_1$ между прямыми $MP$ и $NQ$ меньше углового диаметра

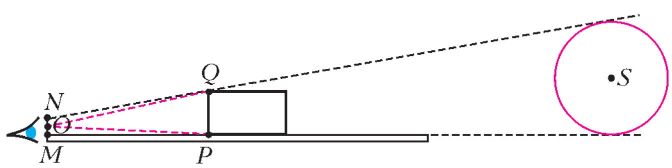


Рис. 11

Солнца, а угол $\alpha_2 = \angle POQ$ – больше. Мы обозначили через $PQ$ диаметр основания цилиндра, а через $O$ – середину отрезка $MN$. Итак, $\alpha_1 < \beta < \alpha_2$ (докажите это в упражнении 13). Так Архимед находит, что угловой диаметр Солнца заключен в пределах от $0{,}45°$ до $0{,}55°$.

Неясным остается, почему Архимед измеряет Солнце, а не Луну. Он был хорошо знаком с книгой Аристарха и знал, что угловые диаметры Солнца и Луны одинаковы. Луну же измерять гораздо удобнее: она не слепит глаза и границы ее видны отчетливее.

Некоторые древние астрономы измеряли угловой диаметр Солнца, исходя из продолжительности солнечного или лунного затмения. (Попробуйте восстановить этот способ в упражнении 14.) А можно сделать то же, не дожидаясь затмений, а просто наблюдая закат Солнца. Выберем для этого день весеннего равноденствия 22 марта, когда Солнце восходит точно на востоке, а заходит точно на западе. Это означает, что точки восхода $E$ и заката $W$ диаметрально противоположны. Для земного наблюдателя Солнце движется по окружности с диаметром $EW$. Плоскость этой окружности составляет с плоскостью горизонта угол $90° - \gamma$, где $\gamma$ – географическая широта точки $M$, в которой находится наблюдатель (например, для Москвы $\gamma = 55{,}5°$, для Александрии $\gamma = 31°$). Доказательство приведено на рисунке 12. Прямая $ZP$ – ось вращения Земли, перпендикулярная плоскости экватора. Широта точки $M$ – угол между отрезком $ZP$ и плоскостью экватора. Проведем через центр Солнца $S$ плоскость $\alpha$, перпендикулярную оси $ZP$. Плоскость горизонта касается земного шара в точке $M$. Для наблюдателя, находящегося в точке $M$, Солнце в течение дня движется по окружности в плоскости $\alpha$ с центром $P$ и радиусом $PS$. Угол между плоскостью $\alpha$ и плоскостью горизонта равен углу $MZP$, который равен $90° - \gamma$, поскольку плоскость $\alpha$ перпендикулярна $ZP$, а плоскость горизонта перпендикулярна $ZM$.

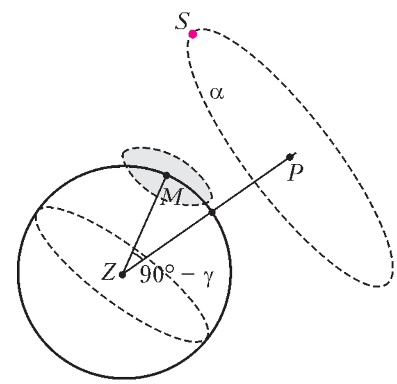


Рис. 12

Итак, в день равноденствия Солнце заходит за горизонт под углом $90° - \gamma$. Следовательно, во время заката оно проходит дугу окружности, равную $\beta/\cos\gamma$, где $\beta$ – угловой диаметр Солнца (рис.13). С другой стороны, за 24 часа оно проходит по этой окружности полный оборот, т.е. $360°$.

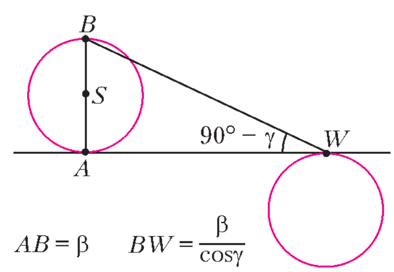


Рис. 13

Получаем пропорцию $\dfrac{\beta/\cos\gamma}{360} = \dfrac{T}{24}$, где $T$ – продолжительность заката (единица измерения – час). Зная $\gamma$ и измерив время $T$, находим $\beta = 0{,}53°$.

### Упражнения

**13.** Докажите, что угол $\alpha_1$ между прямыми $MP$ и $NQ$ (см. рис.11.) меньше углового диаметра Солнца, а угол $\alpha_2 = \angle POQ$ – больше.

**14.** Предложите способ измерения угловых размеров Луны во время лунного затмения.

С автором статьи можно связаться по адресу: v-protassov@yandex.ru