

ПЕРЕКАТЫВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

АННОТАЦИЯ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ МАТЕМАТИКОВ,

в которой очень коротко формулируется то, что очень длинно излагается в книге

Исследуется бесконечно продолженная связная целогранная развертка выпуклого многогранника или, что то же самое, сеть его перекатывания через ребра. Доказывается, что она имеет богатую группу симметрий, поворотов и параллельных переносов, причем множество углов поворота, при которых она переходит в себя, состоит из углов, целократных наибольшему общему делителю кривизн вершин многогранника и числа 2π , если этот делитель существует, и всюду плотно в R , если хоть одна кривизна несоизмерима с π . Группа симметрий сети перекатывания выпуклого многогранника является дискретной (федоровской) только в следующих случаях:

- 1) *кривизны вершин многогранника кратны π (в этом случае многогранник является равногранным тетраэдром или двусторонним прямоугольником);*
- 2) *кривизны вершин многогранника кратны $\pi/2$, а его связную развертку можно разместить вершинами в узлах некоторой квадратной решетки;*
- 3) *кривизны вершин многогранника кратны $\pi/3$, а его связную развертку можно разместить вершинами в узлах некоторой правильной треугольной решетки.*

Отсюда и из теоремы Декарта следует, что многогранник с числом вершин более 12 не может иметь дискретную сеть перекатывания.

Поверхность выпуклого многогранника с дискретной сетью перекатывания может быть разбита, в зависимости от типа группы ее симметрий, на равные части, конгруэнтные фундаментальной области этой группы - квадрату, правильному треугольнику или ромбу, являющемуся объединением двух правильных треугольников. Построение сети перекатывания данного многогранника связано с нахождением наибольшего общего делителя в кольце целых комплексных чисел или аналогичных им «треугольных» комплексных чисел, соответствующих вершинам связной развертки многогранника в некоторой системе координат, прямоугольной или косоугольной. Также рассматриваются и частично перечисляются многогранники с правильными сетями перекатывания, имеющими самопересечения только в своих центрах симметрии.

ПРЕДИСЛОВИЕ,

в котором рассказывается, из какого сора может вырасти математика¹

На проблему, решение которой излагается в этой книжке, я в буквальном смысле слова натолкнулся в 1979 году, когда был учителем математики в Новосибирском Академгородке. На весеннем субботнике мне с классом пришлось чистить пришкольный парк от булыжников и бетонных обломков. Они были такие тяжелые, что их приходилось перекатывать, оставляя на следы сырой земле. Утирая пот со лба, я

¹ «Когда б вы знали, из какого сора // растут стихи, не ведая стыда...» (Анна Ахматова)

вспомнил Сизифа, которого боги приговорили вечно толкать в гору камень, и попытался представить себе, какой узор образовался при этом на склоне. Но ничего, кроме правильных сеток в одних случаях и путаницы линий в других, в голову не приходило. Тогда я отправился в университетскую библиотеку, чтобы порыться в книгах по геометрии, но о перекаtywании многогранников в них не говорилось. Опрос знакомых математиков тоже ни к чему не привел – даже такой выдающийся геометр, как академик А.Д.Александров, не знал, что представляет собой бесконечно продолженная развертка выпуклого многогранника. Решать задачу пришлось самому, и через какое-то время я постучал себя по лбу – можно было сразу сообразить, что она чрезвычайно симметрична. Поняв, что из этого наблюдения может вырасти интересная теория, я провозился еще с месяц и нашел исчерпывающий ответ на вопрос, какова сеть перекаtywания данного полиэдра, и у каких фигур она будет иметь особенно простой и красивый вид. Некоторое время я носился с идеей издать труд о перекаtywании булыжников на субботниках, но случилось так, что из преподавателей математики я ушел в шабашники, а во время перестройки стал кинокритиком, почти забросив прочие увлечения. И лишь недавно, наткнувшись на старую тетрадь с грозной надписью: «НЕ КАНТОВАТЬ!», решил познакомить не утративших интерес к науке читателей с этим трактатом, написанным из совершенно бескорыстной любви к математике, а заодно и с теми полезными алгебраическими и геометрическими понятиями, на которые она опирается – с группами движений плоскости, с теорией точечных решеток, с целыми (гауссовыми) комплексными числами, с графами и обычными развертками многогранников. Поэтому изложение будет иметь ветвистый характер: если во время исследования возникает вопрос, связанный с отдельной математической областью, мы будем отвлекаться в эту область ровно настолько, чтобы дать о ней общее представление и одновременно получить необходимые для продолжения работы результаты. А поскольку в математике всем доказательствам предшествуют идеи, двинемся от идей к доказательствам.

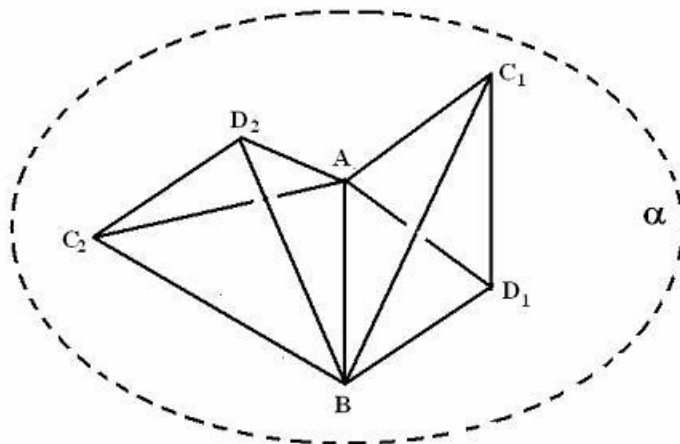
§1,

в котором определяется сеть перекаtywания выпуклого многогранника и доказывается первое неочевидное утверждение теории перекаtywания

Пусть некоторый выпуклый² многогранник M имеет с некоторой плоскостью общую грань G_1 и пусть смежная с ней грань G_2 имеет с G_1 общее ребро E .

² Невыпуклый многогранник перекаtywается по плоскости так же, как его выпуклая оболочка, то есть выпуклый многогранник минимального объема, который содержит

Определение 1.1. Элементарным перекачиванием многогранника с грани G_1 на грань G_2 через ребро E по плоскости называется такой его поворот вокруг оси E , в результате которого у M окажется общая грань G_2 с исходной плоскостью.



Перекачивание треугольной пирамиды $ABCD$ по плоскости α с грани ABD_1 на грань ABC_2 через ребро AB

Рис.1.1

Под это определение подпадает и вырожденный случай, когда многогранник является двугранником, то есть плоским двусторонним многоугольником, в котором различают «нижнюю» (ту, что в данный момент лежит на плоскости) и «верхнюю» грани. Для практики перекачивания многоугольник можно вырезать из тонкого картона и перемещать по плоскости, переворачивая через ребра.

Будем считать, что выпуклый многогранник, перекачиваясь по плоскости, оставляет на ней *следы* своих вершин, ребер и граней. К примеру, на рис.1.1 пирамида $ABCD$, стоя на на грани ABD , оставила след ABD_1 , а после перекачивания на грань ACD оставила след AC_1D .

Определение 1.2. *Поверхностным путем многогранника* называется последовательность смежных граней, через которые его катили из одного положения в другое, а *плоским путем многогранника* – след поверхностного пути на плоскости перекачивания (см. рис.2.1). Бесконечная совокупность всех возможных следов вершин, ребер и граней многогранника, оставленных им на плоскости при всех

данный. Ее можно увидеть воочию, окунув невыпуклый многогранник в мыльную пену, пригодную для пуска мильных пузырей, или закатав его в прозрачную упаковочную пленку, которая обтянет невыпуклые части. Поэтому все дальнейшие результаты можно перенести на невыпуклый случай.

возможных перекачиваний из некоторого начального положения, называется его **сетью перекачивания (СП)**. Элементами сети перекачивания считаются **узлы** (следы вершин многогранника), **ребра** (следы его ребер) и **ячейки** (следы его граней). Множество следов одной вершины многогранника называется **решеткой вершины**, множество следов одного ребра – **сетью ребра**. Два элемента сети перекачивания называются **эквивалентными**, если они являются следами одного элемента многогранника.

Следствием данных определений и свойств многогранника является утверждение

Теорема 1.3.

- а) все плоские пути, соответствующие одному поверхностному пути, конгруэнтны (рис.2.1);*
- б) для двух любых следов одного элемента выпуклого многогранника (вершины, ребра или грани) существует путь, в начале которого многогранник оставляет один след, а в конце – другой.*
- с) если два однотипных элемента многогранника (две вершины, два ребра или две грани) имеют в его СП один общий след, то множества их следов совпадают.*

Справедливость а) очевидна, так как любой путь на поверхности многогранника можно развернуть на плоскость и получить плоский многоугольник (возможно, невыпуклый и самопересекающийся), все следы которого конгруэнтны. Для доказательства б) достаточно заметить, что если многогранник M оставил один след в положении M_1 , а второй – в положении M_2 , то его можно перекачать обратным путем из M_1 в начальное положение, а из него – в положение M_2 . В пункте с) требуется установить совпадение двух множеств. Для этого покажем, что каждый элемент первого множества является элементом второго, и наоборот. Пусть некий элемент E^1 (точка, отрезок или многоугольник) является общим следом элементов A и B . Тогда в силу 1.3б. существует поверхностный путь P и соответствующий ему плоский путь P^1 , в начале которого многогранник M соприкасался с плоскостью элементом A и оставил след E^1 , а в конце – элементом B , оставившим тот же след. Пусть E^2 - произвольный след элемента A . Поставим многогранник на ту же грань и в то же положение, в котором он отпечатал след E^2 , затем прокатим M по пути P и отпечатаем плоский путь P^2 . Согласно 1.3а, P^2 конгруэнтен P^1 , и поэтому в конце пути многогранник оставит тот же след E^2 , но уже элементом B . Значит, каждый след элемента A является следом элемента B . Точно так же доказывается обратное. \square

Следствие: *точечные решетки разных вершин многогранника не имеют общих точек или совпадают.*

Теперь познакомимся с СП простейших фигур. Начнем с двустороннего прямоугольника (см. цветной рис.1). Нетрудно убедиться, что разные его вершины печатают конгруэнтные квадратные решетки, не имеющие общих точек, что каждое его ребро печатает сеть из равноотстоящих друг от друга параллельных прямых (причем сети противоположных ребер параллельны друг другу, а сети смежных ребер – перпендикулярны), и что два множества ячеек СП, соответствующих его граням, не имеют общих внутренних точек и вместе образуют «шахматное» заполнение плоскости. Эти свойства позволяют раскрасить сеть так, как это сделано на рисунке, где следы одной вершины имеют один цвет, а следы разных вершин имеют разные цвета. Аналогичным образом теми же цветами можно так раскрасить внутренние точки ребер, чтобы внутренность ребра и его концы имели разные цвета. Еще два цвета уйдет на внутренние области граней, так что раскраска СП получится 6-цветной. Важно отметить, что СП прямоугольника переходит в себя при повороте вокруг любого следа любой вершины на развернутый угол, и при параллельных сдвигах (переносах) на вектора вида $2me_1 + 2ne_2$, где e_1 и e_2 – векторы перпендикулярных сторон прямоугольника, а m и n – целые числа. Причем – внимание! – переходит так, что при этих движениях (симметриях) точка СП отображается на точку того же цвета. И в дальнейшем мы, если это возможно, будем раскрашивать СПМ так, чтобы эквивалентные узлы имели общий цвет, неэквивалентные – разные, и так же расцветивать ребра многогранников, при необходимости деля их на попарно эквивалентные разноцветные отрезки.

Несколько иная картина открывается при перекачивании куба (попробуйте построить и раскрасить ее самостоятельно, а потом сравните с сетью СК+ЗК+ЗС на цветном рис.4.12). Построение удобно осуществлять в графическом редакторе компьютера: сначала строится квадрат, который размножается до квадратной сети, затем закрашиваются эквивалентные узлы одного типа, затем другим цветом – эквивалентные узлы другого типа и т.д. Центры симметрии сети, не являющиеся ее узлами, обводятся цветными окружностями. Докажите, что каждая вершина печатает квадратную решетку, сторона которой равна диагонали исходного квадрата, причем решетки смежных вершин различны, а решетки противоположных вершин конгруэнтны и не имеют общих точек, и что сети всех ребер куба совпадают, а следы каждой его грани покрывают всю плоскость. Поэтому СП куба раскрашена в 4 цвета: красным и синим – вершины, а зелеными окружностями обведены не являющиеся узлами центры симметрии. Эта СП переходит в себя (с сохранением цветов) при поворотах на углы, кратные прямому, относительно всех своих узлов и центров симметрии, 2) при поворотах на углы, кратные развернутому, относительно центров

своих ячеек, 3) при параллельных переносах на вектора вида $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$, где \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 - векторы перпендикулярных сторон решетки, а m и n – целые числа.

Упражнение. Постройте СП правильного двустороннего треугольника. Убедитесь в том, что его вершины имеют разные конгруэнтные шестиугольные решетки, ребра – разные 6-угольные сети, а два множества ячеек сети, соответствующих граням треугольника, не имеют общих внутренних точек. Раскрасьте сеть согласно правилам в пять цветов. Укажите все повороты и все параллельные переносы, при которых СП переходит в себя таким образом, что каждая ее точка переходит в точку того же цвета. Сравните полученную сеть с сетью СК+СЗ+ЗК на цветном рис. 3.3.

§2,

в котором выясняется, что сеть перекачивания любого многогранника сверхсимметрична

На первый взгляд, сети перекачивания некоторых элементарных многогранников – например, правильной 4-угольной пирамиды с равными ребрами – представляют собой хаотическое нагромождение квадратов и треугольников. Тем не менее, в этом хаосе существует свой порядок. Прежде всего, естественным образом выделяется особый класс перекачиваний многогранника – с какой-нибудь грани на ту же грань. При таком путешествии многогранник передвинется по плоскости так, что эта грань повернется на некоторый угол (может быть, нулевой) относительно своего начального положения. К примеру, перекатив тетраэдр ABCD по плоскости основания BCD через ребра AB, AC и AD, исходящие из вершины A, вы увидите, что он снова встал на грань BCD, но при этом грань BCD повернулась на угол, равный сумме плоских углов при этой вершине A. Сравним два положения грани на плоскости до и после перекачивания, то есть начальное и конечное. Сеть перекачивания можно печатать, исходя из того и другого положения, причем в обоих случаях получится *та же самая сеть*. Чтобы осознать это чрезвычайно важное обстоятельство, представьте, что вы стоите на одном следе этой грани. Потом вам завязывают глаза и переносят на другой ее след. Без навигационных приборов вам не удастся понять, на каком из отпечатков вы находитесь, поскольку относительно каждого из них СПМ устроена совершенно одинаково. Это значит, что если передвинуть сеть перекачивания так, что начальный след грани совместится с конечным, то и вся сеть при этом движении перейдет в себя. Иными словами, любая СПМ сверхсимметрична – движение плоскости, которое отображает один из бесчисленных следов любой грани многогранника на любой другой след той же грани, является симметрией СПМ.

Чтобы уточнить эту мысль, нам понадобится вспомогательное утверждение:

2.1. Два следа одного ребра в сети перекатывания можно отобразить друг на друга поворотом или параллельным переносом.

Пусть A^1B^1 и A^2B^2 – два следа ребра AB (сделайте рисунок). Если вектора A^1B^1 и A^2B^2 сонаправлены, первый след отображается на второй параллельным переносом на вектор A^1A^2 . Если они противоположны, первый след отображается на второй центральной симметрией относительно середины отрезка, соединяющего их начала. Если же эти вектора не параллельны, первый из них отображается на второй поворотом на угол A^1OA^2 , где O – точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам A^1A^2 и B^1B^2 . □

2.2. (Основополагающая теорема о симметриях СПМ). Поворот или параллельный перенос, который отображает один след данного ребра многогранника на другой его след в сети перекатывания, отображает СПМ на себя так, что каждый ее элемент отображается на эквивалентный ему элемент.

Действительно, если поворот или перенос отображает один след данного ребра на другой его след, он отображает и любой плоский путь, начинающийся с первого следа, на конгруэнтный ему плоский путь, начинающийся со второго следа. Это и значит, что при этом движении плоскости в себя переходит вся СПМ. □

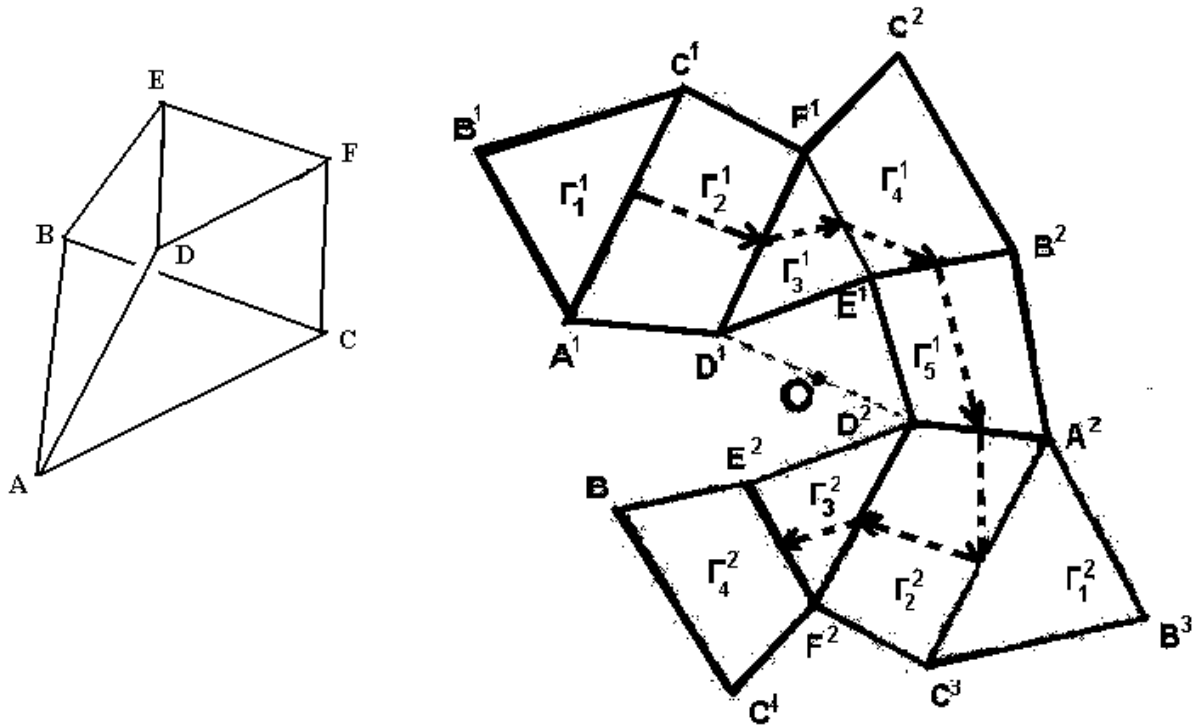


Рис.2.1. Два плоских пути усеченной пирамиды с основаниями $ABC = \Gamma_1$, $ADFC = \Gamma_2$, $DEF = \Gamma_3$, $BEFC = \Gamma_4$, $BEDA = \Gamma_5$. В начальном положении пирамида стояла на грани Γ_1 , затем ее перекатали по пути $\Pi = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4$, то есть последовательно через ребро AC на Γ_2 , через DF на Γ_3 и через EF на Γ_4 . При этом пирамида отпечатала плоский путь $\Pi_1 = \Gamma_1^1\Gamma_2^1\Gamma_3^1\Gamma_4^1$. Далее ее перекатали через BE на Γ_5 , через AD снова на Γ_2 и через AC снова на Γ_1 , после чего повторили поверхностный путь Π и получили плоский путь $\Pi_2 = \Gamma_1^2\Gamma_2^2\Gamma_3^2\Gamma_4^2$, конгруэнтный пути Π_1 .

Задача. Докажите, что путь Π_1 рис.2.1 отображается на Π_2 поворотом на развернутый угол (центральной симметрией) относительно точки O – середины отрезка D^1D^2 .

Фигура, которая переходит в себя при некотором движении плоскости, называется *симметричной*. Таким образом, выходит, что у каждой *СП* бесконечное множество симметрий. Знание этих симметрий очень упрощает построение и исследование сети перекачивания. К примеру, чтобы нарисовать все следы данной вершины в сети перекачивания, достаточно взять один ее след и отметить его образы при всевозможных симметриях сети. Поэтому изучение *СПМ* во многом сводится к изучению ее симметрий.

в котором описываются простейшие симметрии сети перекачивания и вводится понятие кривизны поверхности многогранника в его вершине

Простейшая симметрия СПМ определяется однократным перекачиванием многогранника через ребра, исходящие из одной вершины (направление перекачивания и ребра, через которые перекачивали многогранник, обозначены стрелками на его поверхности):

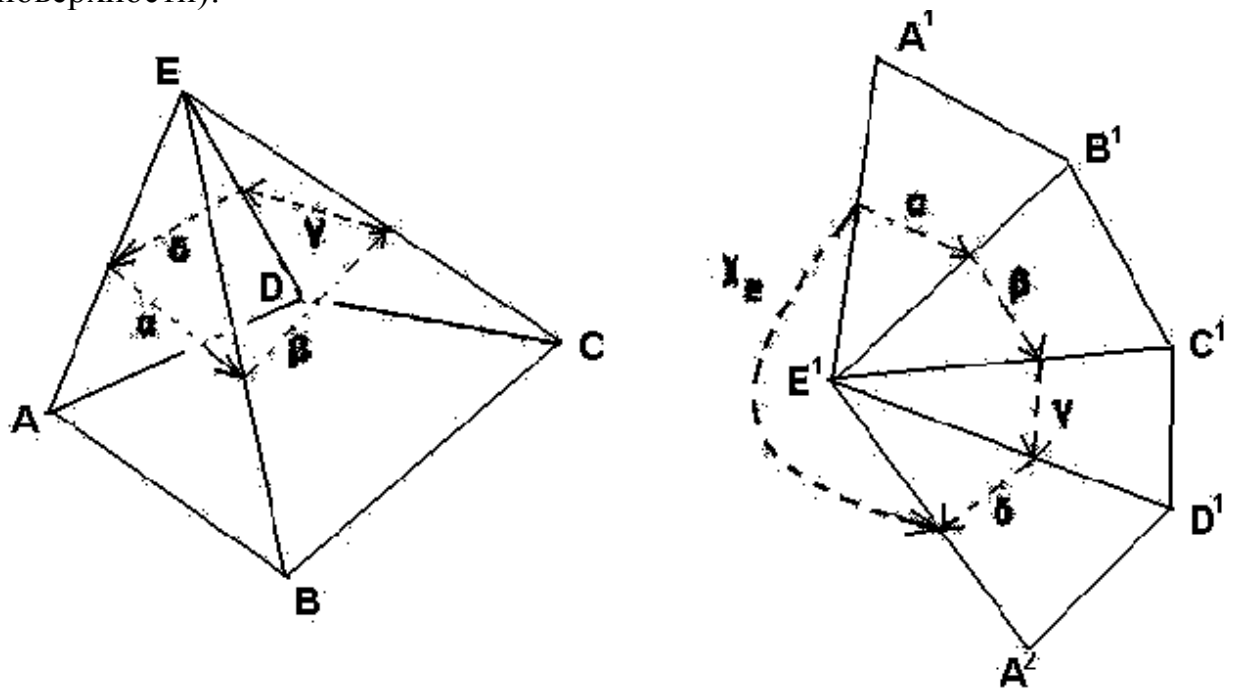


Рис.3.1. Поверхностный путь α - β - γ - δ через ребра EA , EB , EC , ED на поверхности 4-угольной пирамиды и его след на плоскости. Стрелка χ_E указывает положительный угол, равный кривизне вершины E .

Следы вершин обозначены на рисунке теми же буквами, что вершины, но с верхними индексами, показывающими номер следа в данном пути. Сам путь многогранника показан замкнутым контуром из стрелок, обходящим вершину E по прилегающим к ней граням. Будем различать два направления обхода: положительное – против часовой стрелки, если смотреть на него с этой вершины, находясь вне многогранника, и отрицательное - по часовой стрелке. В конце пути многогранник опять встанет на исходную грань (на рис.3.1. – грань ABE), второй след которой повернут относительно первого на некоторый угол. Если контур обходит вершину в положительном направлении, то величина угла поворота, наблюдаемого из того же полупространства, где находится многогранник, равна углу между первым следом первого ребра пути, и вторым следом этого ребра (на рис.3.1 - углу между векторами E^1A^1 и E^1A^2), который, в свою очередь, равен сумме плоских углов

многогранного угла при вершине со знаком минус и поэтому не зависит от того, с какого именно ребра начались перекатывания.

3.1. Определение. Кривизной вершины многогранника (и соответствующего многогранного угла) называется разность между 360° и суммой углов при этой вершине (на рис.3 кривизна показана стрелкой $\chi_E \square \square \square$). Согласно теореме Эвклида, сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360° , и, стало быть, кривизны всех многогранных углов выпуклого многогранника положительны.

Кривизна характеризует остроту угла – чем больше кривизна, тем острее многогранный угол, а чем меньше, тем он более плоский.

Упражнение.

- 1). Докажите, что кривизна угла двустороннего многоугольника равна абсолютной величине удвоенной разности между ним и развернутым углом. Вычислите кривизны углов правильного двустороннего треугольника, ромба с углом 60° , прямоугольника и правильного 6-угольника. Вычислите кривизны многогранных углов куба, правильного тетраэдра, правильной 6-угольной призмы и докажите, что у каждой из этих фигур, как плоских, так и объемных, сумма кривизн всех ее многогранных углов равна удвоенному полному углу.
- 2). Трехгранный угол с плоскими углами $\pi/4$, $\pi/4$ и $\pi/2$ пять раз прокатали по всем ребрам. Нарисуйте все оставленные ими следы.
- 3). опишите множество следов многогранного угла кривизны $8\pi/7$ после бесконечного числа перекатываний вокруг вершины.

Согласно основной теореме 2.2. заключаем:

3.2. Поворот вокруг каждого следа любой вершины многогранника на угол, равный ее кривизне, является симметрией СПМ.

Следствие. Поворот вокруг следа вершины на угол, целократный ее кривизне, также является симметрией СПМ.

Вопрос. Трехгранный угол кривизны

Возникает вопрос – при каких еще поворотах СПМ переходит в себя? Если k_1, \dots, k_n – целые числа, а x_1, \dots, x_n – кривизны вершин многогранника A_1, \dots, A_n , то композиция («сумма») поворотов на углы $k_1 x_1, \dots, k_n x_n$ относительно следов A_1, \dots, A_n на плоскости перекатывания будет симметрией сети с углом $k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$. Как мы увидим несколько позже, СПМ не имеет других углов симметрий, кроме этих. А сейчас нам придется сделать небольшое отступление, чтобы изучить суммы

вида $k_1x_1 + \dots + k_nx_n$, полезные во многих областях математики, поскольку с их помощью изучаются линейные зависимости чисел и функций.

§4,

в котором читатель, не знакомый с понятием общей меры действительных чисел и их целочисленными линейными комбинациями, может с ними познакомиться

Определение 4.1. Целочисленной линейной комбинацией (ЦЛК) чисел x_1, x_2, \dots, x_n называется величина $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n$, где k_1, \dots, k_n – целые.

Определение 4.2. Положительные действительные числа x_1, x_2, \dots, x_n называются **соизмеримыми**, если все они целократны некоторому положительному числу d , т.е. если найдутся такие целые числа s_1, s_2, \dots, s_n , что $x_1 = s_1d, x_2 = s_2d, \dots, x_n = s_nd$, и несоизмеримыми в противном случае. Число d , если оно существует, называется **общей мерой** чисел x_1, x_2, \dots, x_n .

4.3. Лемма. Чтобы числа x_1, x_2, \dots, x_n были соизмеримы, необходимо и достаточно, чтобы частные $x_2/x_1, \dots, x_n/x_1$ были рациональны, т.е. представимы в виде отношения целых чисел.

Задача (нетрудная). Докажите, что:

a) **наибольшей** общей мерой (НОМ) положительных рациональных чисел, представленных в виде правильных дробей, является частное от деления наибольшего общего делителя их числителей на наименьшее общее кратное их знаменателей;

b) если числа x_1, x_2, \dots, x_n иррациональны и соизмеримы, то $\text{НОМ}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \text{НОМ}(1, x_2/x_1, \dots, x_n/x_1)$.

К примеру, $\text{НОМ}(5\pi/6, 2\pi/3, 7\pi/12, 8\pi/15) = \pi(\text{НОД}(5,6,2,7,8)/\text{НОК}(6,3,12,15)) = \pi/60$.

Оказывается, если числа соизмеримы, то любое число, кратное их НОМ, представимо в виде ЦЛК этих чисел.

4.5. Лемма. Множество ЦЛК соизмеримых положительных чисел совпадает с множеством чисел, кратных их НОМ.

Докажем это утверждение сначала для двух положительных соизмеримых чисел R и S , таких, что $\text{НОМ}(R,S) = d$. Для этого найдем такую их ЦЛК, которая равна d . Так как по условию, $R = rd, S = sd$, где r и s – натуральные числа, не имеющие общих делителей, кроме 1, задача сводится к отысканию таких целых u и v , что $uR - vS = d$. Поделив обе

части этого соотношения на d , имеем $ur - vs = 1$ или $vs = ur - 1$. Мы решим данное уравнение, если найдем такое целое u , что $ur - 1$ делится на s . Рассмотрим s чисел: $r - 1, 2r - 1, \dots, sr - 1$. Нетрудно видеть, что остатки от их деления на s различны. В самом деле, предположим, что какие-то два остатка равны. Тогда для некоторых натуральных чисел $u_1 > u_2$, меньших либо равных, чем s , разность $(u_1r - 1) - (u_2r - 1) = (u_1 - u_2)r$ делится на s . Поскольку числа r и s взаимно-просты, $(u_1 - u_2)$ делится на s , что невозможно, поскольку $u_1 - u_2 < s$. Но если s чисел имеют разные остатки от деления на s (которых вместе с нулевым остатком всего s), то среди этих остатков есть нулевой. Это и значит, что при некотором значении u число $ur - 1$ делится на s . Умножая обе части равенства $ur - vs = 1$ на kd , где k – произвольное целое число, получим $(ku)R - (kv)S = kd$, откуда и следует, что ЦЛК(R, S) может принять любое значение, кратное d .

Упражнение. Представьте число 1 в виде ЦЛК взаимно-простых чисел 7 и 11, затем представьте в аналогичном виде число 21.

Обобщение на случай трех чисел R, S, T получается с учетом очевидного равенства $\text{НОМ}(R, S, T) = \text{НОМ}(\text{НОМ}(R, S), T)$. В самом деле, пусть $\text{НОМ}(R, S) = d$. Тогда $\text{НОМ}(R, S, T) = \text{НОМ}(d, T)$. На основании только что доказанного, найдутся такие целые u, v , что $\text{НОМ}(d, T) = ud + vT$, и такие целые p, q , что $pR + qS = d$. Подставляя левую часть второго уравнения в первое уравнение вместо d , получим $\text{НОМ}(d, T) = (up)R + (uq)S + vT$, т.е. $\text{НОМ}(R, S, T) = \text{НОМ}(d, T)$ представима в виде ЦЛК(R, S, T). Обобщение на случай четырех и более чисел осуществляется аналогичным образом.

4.6. Лемма. Множество ЦЛК несоизмеримых чисел всюду плотно³ в \mathbb{R} .

Пусть $w = X/Y$ иррациональное положительное число. Рассмотрим дробные части чисел вида kw , где k – натуральное. Все они различны, поскольку в противном случае разность $k_1w - k_2w = (k_1 - k_2)w$ была бы целым числом, а w – рациональным. Разобьем отрезок $(0, 1)$ на N равных частей и рассмотрим $(N+1)$ дробную часть чисел kw , где k пробегает натуральные значения от 1 до $(N+1)$. Эти дробные части, как замечено выше, различны и меньше 1. Значит, в каком-то из маленьких интервалов длиной $1/N$ находятся две дробные части чисел вида kw , и разность между ними меньше $1/N$. Поскольку N мы можем выбрать сколь угодно большим, разность дробных частей чисел вида kw может

³ Всюду плотным в \mathbb{R} называется такое его подмножество M , что для любого числа из \mathbb{R} в любой его окрестности найдется число из M . С физической точки зрения всюду плотное множество – это множество, располагающееся на числовой прямой без просветов между точками, а на плоскости – без белых пятен.

быть сколь угодно мала по модулю. Так как дробная часть положительного числа $k\omega$ – это разность между ним и ближайшим к нему снизу целым числом, то для любого, сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся такие целые k_1, k_2, m и n , что $|(k_1\omega - m) - (k_2\omega - n)| = |(k_1 - k_2)\omega - (m - n)| < \varepsilon$. Это значит, что среди чисел вида $k\omega - s$, где k и s – целые, есть сколь угодно малые. Но тогда и среди чисел вида $X(k\omega - s) = X(k(X/Y) - s) = kX - sY$ тоже есть сколь угодно малые, а это означает, что кратные им и тоже принадлежащие множеству $\text{ЦЛК}(X, Y)$ числа заполняют числовую ось так тесно, что в каждом сколь угодно малом ее интервале есть числа из этого множества. Такое числовое множество называется *всюду плотным* в множестве действительных чисел. Но если уже множество ЦЛК двух несоизмеримых чисел всюду плотно в \mathbb{R} , то всюду плотно множество ЦЛК трех и более чисел, поскольку оно содержит множество попарных ЦЛК.

Задача для исследования (трудная). Что может представлять собой множество ЦЛК нескольких векторов на плоскости?

§5,

в котором читателю предлагается стать следопытом и заодно узнать, при каких поворотах сеть перекатывания переходит в себя

Вооружившись знанием ЦЛК, мы можем вернуться к вопросу об углах симметрий СПМ. Поскольку два угла, разность между которыми целократно полному углу, геометрически равны, множество углов симметрий СПМ включает углы вида $k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n + 2\pi s$, где s – целое, то есть ЦЛК чисел x_1, \dots, x_n и 2π . С учетом этого обстоятельства и основной теоремы о ЦЛК, получаем результат:

5.1. Если кривизны всех вершин выпуклого многогранника соизмеримы с π , множество углов симметрий его СП включает все углы, кратные $2\pi/k$, где k – некоторое натуральное число, большее единицы. Если кривизна хотя бы одной вершины многогранника несоизмерима с π , множество углов симметрий СПМ всюду плотно в интервале $(0, 2\pi)$.

Докажем теперь, что *каждый* угол симметрии СПМ представим в виде ЦЛК кривизн вершин многогранника. Для этого достаточно изучить всевозможные расположения двух следов одного ребра в сети перекатывания.

Условимся показывать последовательность перекатываний многогранника стрелками на его на его поверхности, которые последовательно соединяют середины ребер, через которые его катят. Если многогранник дважды подряд перекатывают через одно ребро, он

совершает нулевое движение, и две стрелки, подходящие к ребру с одной грани, заменяются одной, соединяющей начало первой с концом второй (как стрелки 5 и 6, замененные стрелкой 11 на рис.5.1). Тем самым на поверхности многогранника образуется направленный замкнутый контур из стрелок, который проходит по замкнутому поясу из граней.

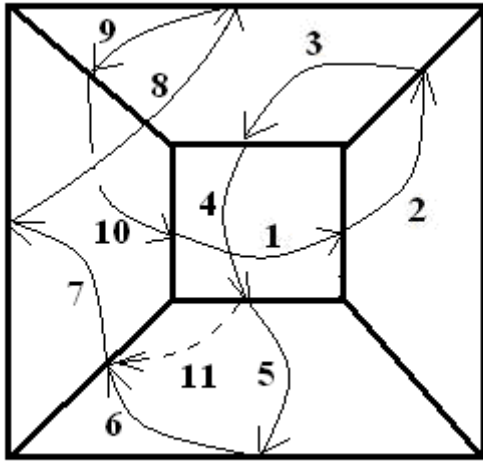


Рис.5.1. Замкнутый контур на поверхности усеченной 4-угольной пирамиды (вид сверху).

Задача. Докажите, что любой выпуклый многогранник, перекатываясь из любого начального положения, может накрыть любую точку на плоскости, т.е. что сеть перекатывания любого выпуклого многогранника покрывает плоскость.

Определение 5.2. Замкнутый контур из стрелок называется **сложным** или **простым** в зависимости от того, имеет он самопересечения (самоналожения) или нет.

Если последовательно прокатить многогранник через все ребра, которые пересекает контур, мы получим два следа первого ребра этого пути. Угол между этими следами является углом симметрии СПМ. Очевидно, что этот угол не зависит от того, с какого ребра начинать путь, и поэтому является функцией самого контура. Стало быть, каждому замкнутому контуру на поверхности многогранника соответствует угол симметрии СПМ. В случае, если контур представляет собой «восьмерку», огибающую две вершины в разных направлениях, соответствующий угол будет равен разности кривизн этих вершин. Поэтому естественно предположить, что и в общем случае угол симметрии будет равен сумме кривизн каких-то вершин многогранника с целыми коэффициентами.

Чтобы доказать эту теорему в общем виде, нам понадобится следующее свойство поверхности выпуклого многогранника (а также сферы и плоскости):

5.3. *Простой направленный замкнутый контур разбивает поверхность выпуклого многогранника на две несвязных области. Та из них, которую он обходит (при взгляде изнутри многогранника) в положительном направлении, называется положительной областью контура, а другая – отрицательной областью. При этом разные концы ребер, которые пересекает контур, лежат в разных областях.*

Это свойство является прямым следствием теоремы Жордана о непрерывной замкнутой кривой на плоскости или сфере. Теорема утверждает, что такая кривая разбивает плоскость или сферу на две области, несвязные между собой в том смысле, что любая непрерывная кривая, соединяющая две точки разных областей, непременно пересекает исходную замкнутую кривую. К примеру, если взять точку внутри данного круга и точку вне его, то любой непрерывный путь из одной точки в другую пересечет окружность. Доказательство теоремы Жордана, увы, слишком громоздко для того, чтобы привести его здесь, так что примем его на веру.

5.4. *Угол симметрии, он же угол поворота грани многогранника, соответствующий его однократному прокатыванию по простому замкнутому контуру, равен сумме кривизн вершин отрицательной области контура или сумме кривизн его положительной области со знаком минус.*

Определение 5.5. *Направленным углом между векторами, лежащими в одной плоскости, называется угол, на который нужно повернуть первый вектор, чтобы он стал сонаправлен второму. Угол между вектором \mathbf{a} и вектором \mathbf{b} считается положительным или отрицательным в зависимости от того, осуществляется этот поворот против часовой стрелки или по часовой стрелке. Согласно этому определению, $\angle \mathbf{ab} = -\angle \mathbf{ba}$, $\angle \mathbf{ab} + \angle \mathbf{bc} = \angle \mathbf{ac}$. К примеру, если A, B, C, D – расположенные в положительном направлении вершины квадрата (нарисуйте), то $\angle AB, BC = 90^\circ$, $\angle AB, DB = -45^\circ$, $\angle AD, CB = 180^\circ$.*

Доказательство. Согласно 5.3, все ребра, которые пересекает наш контур, можно считать такими векторами, чьи начала находятся в одной из областей разбиения, а концы – в другой. Условимся считать, что каждая стрелка контура указывает угол между векторами, которые она соединяет.

Пусть P_1 - ребро, через которое мы совершим первое перекачивание. Последовательно прокатим многогранник через все пересекаемые контуром ребра P_1, P_2, \dots, P_n , обозначив их следы теми же буквами с индексами наверху (рис.5.2). В конце этого пути P_1 снова окажется на плоскости перекачивания, но, вообще говоря, в другом месте, а угол, на который повернется многогранник, будет равен углу между двумя векторами – следами P_1 , то есть векторами P_1^1 и P_1^2 .

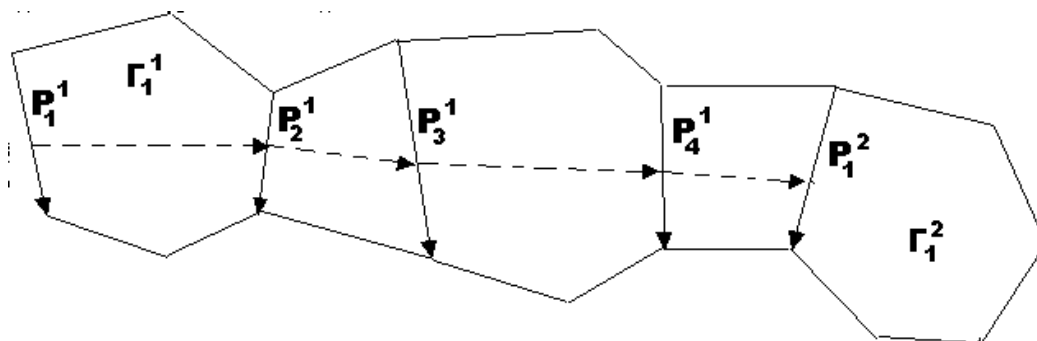


Рис.5.2.

Обратим внимание на следы всех ребер, через которые мы катили многогранник, включая второй след ребра P_1 . Поскольку соседние векторизованные ребра пути лежат в одной плоскости (плоскости грани, которой они принадлежат), углы между их следами будут равны углам между самими ребрами. Тогда, если обозначить эти следы теми же буквами, но с индексами наверху, то в силу отмеченного свойства $\angle ab + \angle bc = \angle ac$ будет иметь место равенство:

$$\angle P_1^1 P_1^2 = \angle P_1^1 P_2^1 + \angle P_2^1 P_3^1 + \dots + \angle P_{n-1}^1 P_n^1 + \angle P_n^1 P_2^1 = \angle P_1 P_2 + \angle P_2 P_3 + \dots + \angle P_{n-1} P_n + \angle P_n P_1,$$

Это значит, что верно

5.6. Угол симметрии СПМ, соответствующий однократному прокатыванию многогранника по простому контуру в положительном направлении, равен сумме всех углов, указанных стрелками контура (и, повторим, не зависит от того, с какого именно ребра начинать путь).

Остается связать сумму углов, указанных пунктирными стрелками контура ($\Sigma_{\text{контура}}$), с кривизнами вершин его внутренней области (рис.5.3). Будем считать стрелки контура и указываемые ими углы углами 1 типа. Чтобы ввести в игру кривизны, обведем все вершины области непрерывными стрелками в отрицательном направлении и будем считать, что они указывают углы 2 типа - между соседними ребрами, исходящими из одной вершины (все эти углы отрицательны):

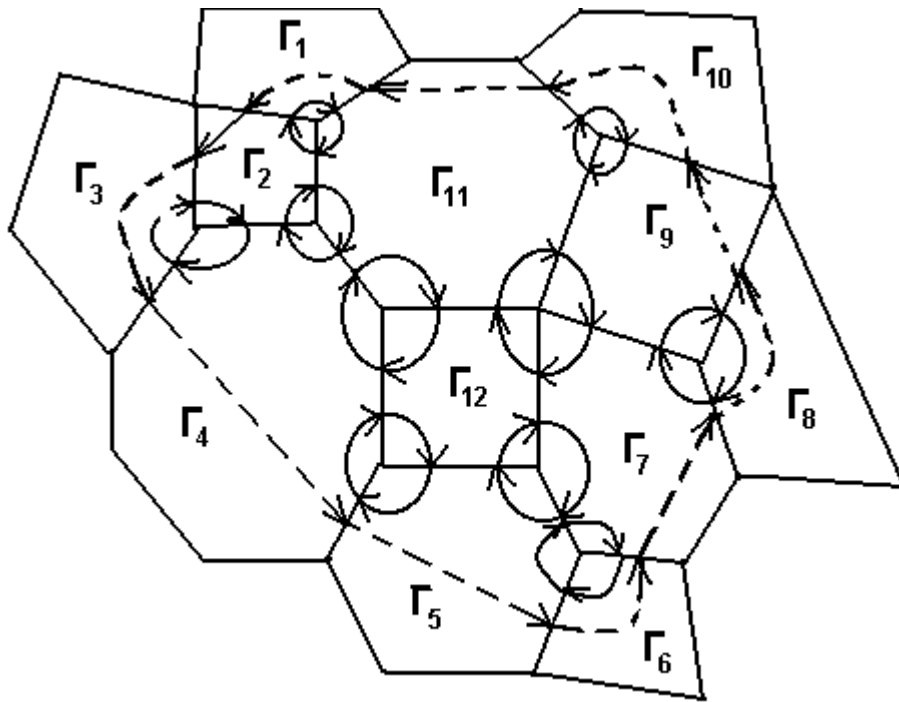


Рис.5.3. Вид изнутри на часть поверхности многогранника с простым контуром и циркуляциями стрелок вокруг «внутренних» вершин.

Сумма углов при одной вершине равна разности между кривизной вершины и полным углом 2π , так что сумма углов при всех вершинах, попавших внутрь контура, $\sum_{\text{углов при вершинах}} = \sum_{\text{кривизн вершин}} - 2\pi\mathbf{B}$, где \mathbf{B} – число вершин области.

После проведения непрерывных стрелок углы всех граней, частично или полностью попавших в рассматриваемую область, оказались помечены стрелками. Если грань целиком содержится в области (как Γ_{12}), то стрелки на ней только красные. Если грань только частично попадает во внутреннюю область контура, то непрерывные и пунктирные указывают углы выпуклого многоугольника (возможно, бесконечного), образованного продолжениями тех ребер, которые соединены пунктирными стрелками. К примеру, две противоположно направленные стрелки на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_6, \Gamma_8$ и Γ_{10} указывают углы, которые в сумме дают нуль, пунктирная и две непрерывные стрелки на Γ_5 указывают углы бесконечного 4-угольника, полученного продолжением ребер этой грани, соединенных пунктирной стрелкой, а пунктирная и три непрерывных стрелки на Γ_7 указывают углы конечного 5-угольника, так же полученного из Γ_7 . Согласно теореме о сумме углов выпуклого многоугольника (докажите, что она верна и для бесконечного случая!), сумма углов на грани Γ_k равна $-\pi(n_k - 2) = 2\pi - \pi n_k$, где n_k – число ребер грани Γ_k , соединенных стрелками. Если $n_k = 2$, как на $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_6, \Gamma_8$ и Γ_{10} , эта величина обращается в нуль.

Пусть общее число целых и нецелых граней, попавших в область, равно Γ , а общее число ее целых и нецелых ребер равно P . Сложим все величины $(2\pi - \pi n_k)$. Поскольку каждое ребро принадлежит двум граням, оно при этом посчитается дважды, так что сумма всех n_k равна $2P$. А поскольку сумма всех 2π , взятых по разу для каждой грани, равна $2\pi\Gamma$, то искомая сумма составит $(2\pi\Gamma - 2\pi P) = 2\pi(\Gamma - P)$. А так как при этом мы просуммировали все углы при вершинах внутри контура и все углы, показанные пунктирными стрелками, эта величина, с другой стороны, равна $\sum_{\text{углов при вершинах}} + \sum_{\text{контура}}$. Подставляя сюда $\sum_{\text{углов при вершинах}} = \sum_{\text{кривизн}} - 2\pi B$, окончательно получаем: $\sum_{\text{контура}} = -\sum_{\text{кривизн}} + 2\pi(B + \Gamma - P)$, то есть $\sum_{\text{контура}} = -\sum_{\text{кривизн}} \pmod{2\pi}$, и угол поворота многогранника при прокатывании по контуру будет равен $\sum_{\text{кривизн}}$, что и требовалось доказать.

По теореме Эйлера, которую мы докажем позже, число $B + \Gamma - P$ (“эйлерова характеристика”) выпуклого многогранника равно 2, откуда $S(K) = 4\pi - S$. Поскольку наши рассуждения справедливы и для случая, когда пунктирные стрелки отсутствуют, а непрерывные обходят все вершины многогранника, сумма кривизн вершин выпуклого многогранника равна 4π (теорема Декарта).

Наши рассуждения непосредственно относятся и ко «внешней» области контура.

Задание. Нарисуйте на поверхности правильной 4-угольной пирамиды простой замкнутый контур, одна из областей которого содержит две вершины основания. Выясните, какой плоский путь отпечатает многогранник при бесконечном прокатывании по этому контуру.

§6,

в котором показывается, как сложные контуры разлагаются до полной простоты

Сначала научимся разбивать сложный контур на простые части, не меняя суммы углов, указанных его стрелками.

Векторизация ребер самопересекающегося контура осуществляется так. Если мы, находясь вне многогранника и двигаясь по его поверхности в направлении, заданном стрелками контура, подходим к ребру, то левый от нас конец ребра считаем началом вектора, а правый – его концом.

Тогда верно

6.1. Угол симметрии СПМ, соответствующей прокатыванию многогранника по замкнутому самопересекающемуся контуру, равен сумме углов, показанных его стрелками.

Теперь можно перейти к ликвидации самопересечений. Они возможны либо внутри граней многогранника, либо на его ребрах. Рассмотрим сначала пересечение стрелок внутри грани (рис.6.1, слева). Покажем, что пересекающиеся стрелки α, β можно заменить на непересекающиеся стрелки γ, δ с сохранением суммы углов, которые они показывают.

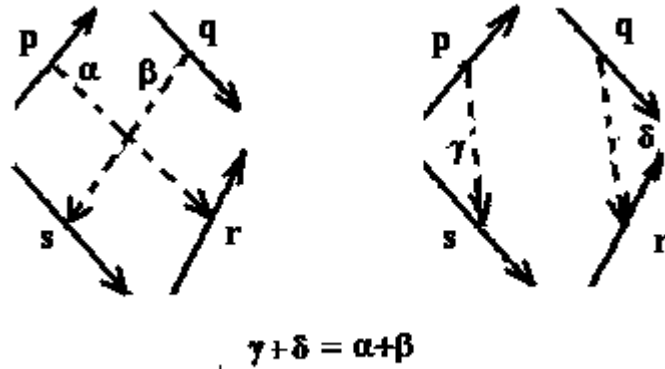


Рис.6.1.

В самом деле, поскольку $\alpha = \angle(p,r)$, $\beta = \angle(q,s)$, $\gamma = \angle(p,s)$, $\delta = \angle(q,r)$, то $\angle(p,r) + \angle(q,s) = \angle(p,r) + \angle(r,s) + \angle(q,s) - \angle(r,s) = (\angle(p,r) + \angle(r,s)) + (\angle(q,s) + \angle(s,r)) = \angle(p,s) + \angle(q,r)$

Еще проще устраняется самопересечение на ребре, когда две части контура α, β и γ, δ подходят к нему с разных граней (рис.6.2). Действительно, $\alpha + \beta = \angle(p,r) + \angle(r,s) = \angle(p,s) = \psi$.

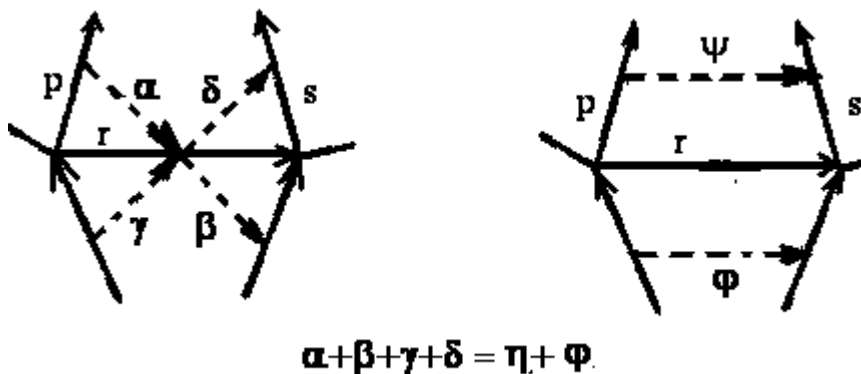
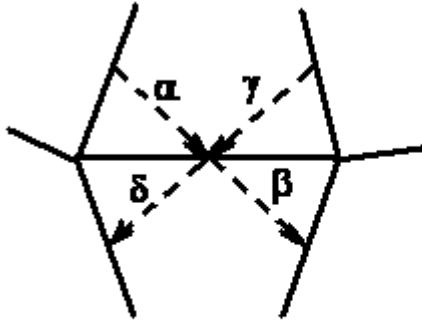


Рис.6.2.

Если же две цепочки из стрелок (рис.6.3 слева) подходят к ребру с одной грани, нужно лишь перераспределить стрелки между частями, отнеся α и β к одной части, а γ и δ - к другой (рис.6.3 справа):



$$(\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) = (\alpha + \delta) + (\gamma + \beta)$$

Рис.6.3.

Поскольку при каждой такой операции мы избавляемся от одной точки самопересечения, то в конце концов разложим самопересекающийся контур на элементарные с геометрически той же суммой углов, указанных стрелками (рис.6.4, где пунктирная стрелка принадлежит сразу двум контурам).

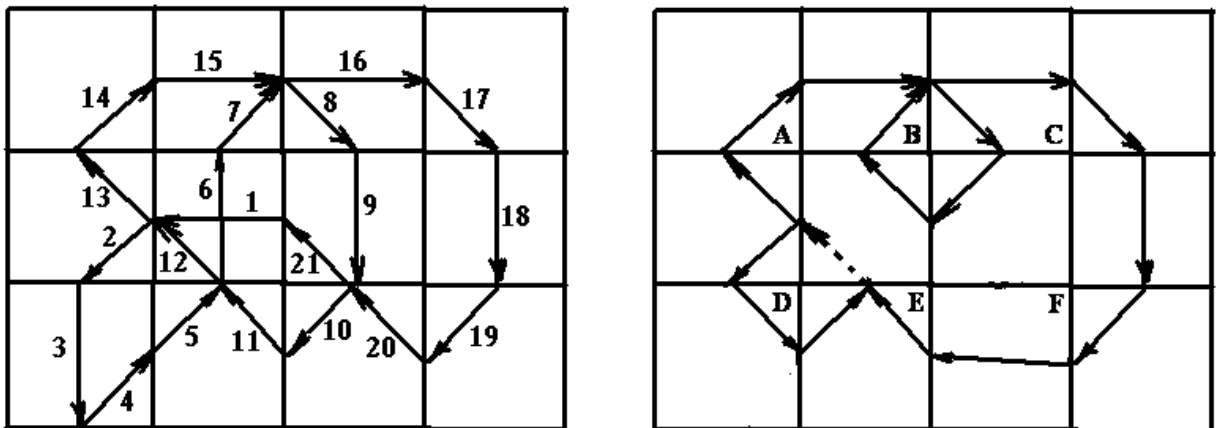


Рис.6.4

Итак, мы показали, что справедливо

6.2. Самопересекающийся контур на поверхности выпуклого многогранника можно разложить на элементарные контуры так, что сумма углов, указанных стрелками исходного контура, будет равна сумме углов, указанных стрелками контуров разложения.

Согласно теореме 5.6., сумма углов, указанных стрелками каждого контура разложения, равна сумме кривизн вершин его внутренней области и сумме кривизн внешней области со знаком минус. Значит, справедливо утверждение

6.3. Угол симметрии, соответствующий прокатыванию многогранника по замкнутому контуру, равна сумме произведений кривизн вершин многогранника на целые коэффициенты, каждый из которых равен числу элементарных контуров разложения, которые обходят данную вершину в положительном направлении, со знаком минус (если таких нет, коэффициент равен 0).

Тем самым установлено, что все углы симметрии СПМ суть ЦЛК кривизн его вершин.

6.4.. Основная теорема об углах симметрий СПМ. Если НОМ кривизн вершин многогранника и числа 2π равна $2\pi/k$, где k – натуральное число, то множество углов симметрии СПМ состоит из чисел, целократных $2\pi/k$. Если хотя бы одна кривизна несоизмерима с π , это множество всюду плотно на числовой оси.

Эта теорема дает основание для предварительной классификации многогранников в зависимости от свойств множества углов его поворота.

Определение 6.5. Выпуклый многогранник принадлежит к классу M_k , если НОМ кривизн его вершин равна $2\pi/k$, и к классу M_∞ , если кривизны хотя бы двух вершин несоизмеримы.

К примеру, правильная четырехугольная пирамида с равносторонними боковыми гранями имеет кривизну вершины $2\pi/3$ и кривизны в вершинах основания $5\pi/6$. $\text{НОД}(2\pi/3; 5\pi/6; 2\pi) = 2\pi/12$. Стало быть, она принадлежит классу M_{12} .

Вопрос: к каким классам принадлежит правильная N -угольная призма и правильная N -угольная пирамида?

Задача. Докажите, что число вершин многогранника класса M_k не превосходит $2k$.

§7,

в котором появляется группа симметрий и обнаруживается, что сеть перекатывания приходит в себя не только при некоторых поворотах, но и при некоторых переносах

Наиболее простыми для изучения симметриями СПМ являются ее переносы, свидетельствующие о периодичности ее строения. Но всегда ли СПМ имеет симметрии-переносы? Легко показать, что ответ на этот

вопрос положителен. Дело в том, что параллельный перенос можно получить как результат четырех последовательных поворотов вокруг двух разных центров, а в любой сети перекачивания не менее трех центров, поскольку выпуклый многогранник имеет минимум три вершины.

Определение 7.1. Если R и S – два движения плоскости, то их суммой $R+S$ называется результат последовательного выполнения движения S , а затем движения R . Движение S называется обратным к движению R , если $S+R=E$, где E – тривиальное преобразование плоскости, отображающее каждую ее точку на себя. В этом случае S записывается как R^{-1} .

Так, движением, обратным повороту R_O^α , является поворот $R_O^{-\alpha}$, а движением, обратным переносу на вектор T – перенос на вектор $(-T)$.

Упражнение. Убедитесь на примере, что сумма двух последовательных вращений относительно разных центров зависит от порядка, в котором они совершаются. Объясните, почему сумма $R_B^\pi + R_A^\pi$ двух центральных симметрий является переносом на вектор $2AB$, а композиция $R_A^\pi + R_B^\pi$ – переносом на противоположный ему вектор $2BA$.

Докажите, что справедливо

7.2.

1. Сумма $R_A^\alpha + R_B^\beta$ является поворотом на угол $\alpha+\beta$ вокруг некоторого центра, если этот угол не кратен полному углу, и является переносом, если он кратен полному углу.

2. Сумма поворота на угол α и переноса является поворотом на угол α относительно другого центра.

3. Сумма переносов на вектора T_1 и T_2 является переносом на вектор $T_1 + T_2$.

В соответствии с этими свойствами перенос можно считать нетривиальным поворотом на нулевой угол. Тогда теорема о сложении углов при суммировании поворотов распространяется и на тот случай, когда какие-то повороты в этом суммировании являются переносами.

Определение 7.3. Множество, на котором определена операция, ставящая в соответствие каждой паре его элементов (x,y) третий элемент $z=x*y$ называется **группой**, если

1). Для всех a,b,c имеет место $a*(b*c)=(a*b)*c$ (ассоциативный закон).

- 2). Существует такой элемент e , что для каждого элемента a имеет место $a * e = e * a = a$ (закон существования единицы).
- 3). Для каждого элемента a существует элемент a^{-1} , такой, что $a * a^{-1} = e$ (закон существования обратного элемента).

Следствие. Симметрии точечного множества образуют группу, единицей которой является тождественное преобразование.

К примеру, группа симметричных движений квадрата состоит из четырех поворотов вокруг его центра на углы $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° .

Вопрос: из каких поворотов состоит группа симметрий правильного T -угольника?

7.4. Теорема о группах движений на плоскости.

1. Если группа движений содержит повороты на углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, она содержит поворот на угол, равный любой ЦЛК($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$). Если все углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ соизмеримы с π , то, согласно теореме о ЦЛК, множество углов всех симметрий входящих в группу, кратно $2\pi/n$, где n – некоторое натуральное число, большее, чем единица. Класс таких групп мы обозначим G_n . Если хотя бы один угол симметрии несоизмерим с 2π , это множество всюду плотно в интервале $(0, 2\pi)$, и класс таких групп мы обозначим G_∞ .

2. Если группа движений содержит переносы на вектора T_1, \dots, T_n , она содержит любую их ЦЛК.

3. Если группа симметрий содержит перенос T и поворот на угол α , она содержит и перенос, являющийся поворотом вектора T на угол α .

Пусть T_1 – перенос, R^α_A – поворот. Рассмотрим тройную композицию $T_2 = R^\alpha_A + T_1 + R^{-\alpha}_A = P^\alpha_A + (T_1 + R^{-\alpha}_A)$. Согласно теореме о композициях, $(T_1 + R^{-\alpha}_A)$ является поворотом на $(-\alpha)$, а композиция двух поворотов P^α_A и $(T_1 + R^{-\alpha}_A)$, углы которых в сумме дают ноль – переносом.

4. Если группа движений содержит хотя бы два нетривиальных поворота вокруг разных центров, она содержит перенос.

Пусть P^α_A и R^β_B – два нетривиальных поворота. Рассмотрим композицию $T_1 = R^{-\beta}_B + R^{-\alpha}_A + R^\beta_B + R^\alpha_A$. Сумма углов входящих в нее поворотов равна 0, но эта композиция, как легко убедиться, например, по движению точки B , не является тождественным преобразованием и, следовательно, является переносом.

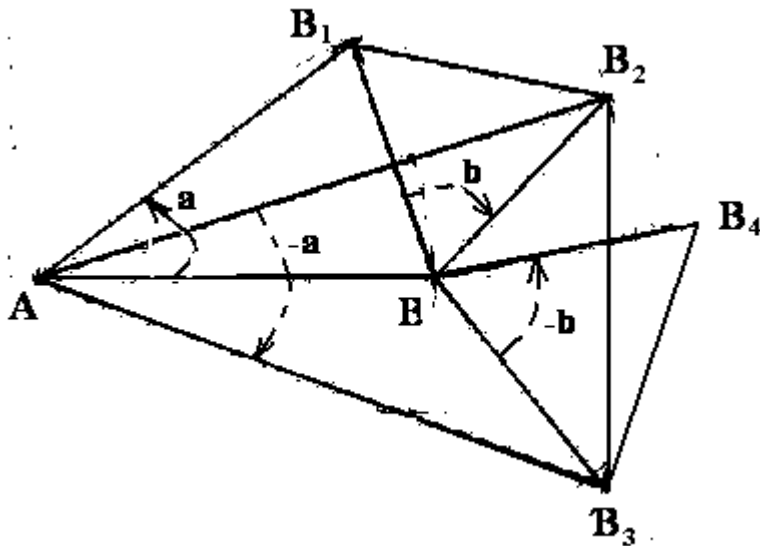


Рис.7.1.

Рассмотрим движение точки В при заданной композиции поворотов: В поворачивается на угол α вокруг точки А и переходит в точку B_1 , B_1 поворачивается на угол β вокруг точки В и переходит в точку B_2 , B_2 поворачивается на угол $(-\alpha)$ вокруг точки А и переходит в B_3 , B_3 поворачивается вокруг В на угол $(-\beta)$ и переходит в B_4 . Таким образом, вектор BB_4 является композицией четырех поворотов.

Вычислим его длину, которая, очевидно, определяется расстоянием АВ и величинами углов α и β . Как ясно из чертежа, $BB_4 = BB_3$, а поскольку треугольник AB_1B_2 равен треугольнику ABV_3 , то $BB_3 = B_1B_2$. Из равнобедренного треугольника BB_1B_2 следует, что $B_1B_2 = 2BB_1 \sin \beta/2$, а из равнобедренного треугольника AB_1B следует, что $BB_1 = 2AB \sin \alpha/2$. Следовательно, $BB_4 = 4AB \sin \alpha/2 \sin \beta/2$. Эта величина равна нулю лишь тогда, когда один из поворотов – нулевой.

Нетрудно указать конкретный контур, в результате прокатывания по которому M совершает ненулевой параллельный перенос. Например, такой:

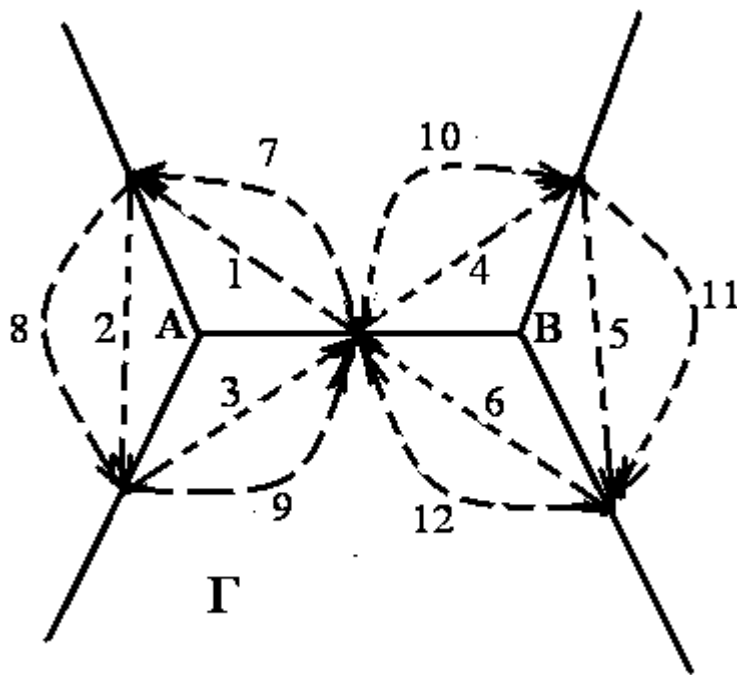


Рис.7.2.

Выясним теперь, каковы образы данной точки при всевозможных переносах из группы G_n . Согласно 7.4, G содержит два переноса T_1 и T_2 , угол между которыми равен $2\pi/n$ для некоторого натурального n , а вместе с ними и любую их ЦЛК. Случай $n=2$ мы рассмотрим особо, а сейчас предположим, что $n>2$. Тогда T_1 и T_2 не параллельны, и переносы данной точки на всевозможные ЦЛК(T_1, T_2) образуют ромбическую точечную решетку:

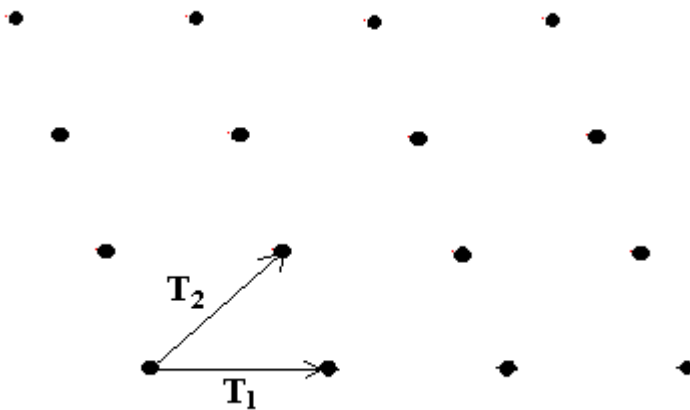


Рис.7.3.

Очевидно, что если группа содержит сколь угодно короткие переносы, полученные с помощью каждого из них точечные решетки всюду плотно заполняют плоскость. В частности, если такие переносы содержит группа симметрий сети перекатывания выпуклого многогранника, следы каждой его вершины будут всюду плотны на плоскости перекатывания.

§8,

в котором группы симметрий ненасильственно делятся на дискретные, полунепрерывные и непрерывные

Чтобы выяснить, при каких условиях группа G_n имеет сколь угодно короткие переносы, опять обратимся к равным по длине переносам T_1 и T_2 , угол между которыми равен $2\pi/n$ для некоторого натурального $n > 2$, и рассмотрим перенос $T_3 = T_1 - T_2$. При большом значении n угол $2\pi/n$ будет мал, и T_3 окажется во много раз короче T_1 . Возьмем равный ему по длине перенос T_4 , образующий с ним угол $2\pi/n$. Тогда вектор $T_5 = T_3 - T_4$ будет во много раз короче T_3 . Продолжая этот процесс, мы получим последовательность переносов, чьи длины убывают в геометрической прогрессии и стремятся к нулю. Следовательно, при любом достаточно большом n группа G_n имеет сколь угодно короткие переносы. Тем более их имеет группа G_∞ (почему?).

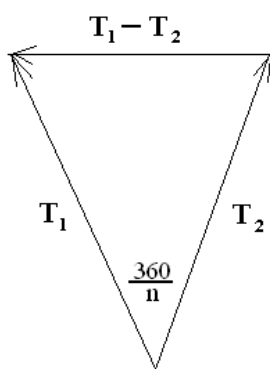


Рис.8.1.

Уточним эти соображения. Из рисунка 8.1. ясно, что $|T_3| = |T_1 - T_2| = 2|T_1|\sin(\pi/n) = k|T_1|$. На следующем шаге мы получим $|T_5| = k|T_3| = k^2|T_1|$. Если продолжить этот процесс, мы получим ряд трансляций, чьи длины составляют геометрическую прогрессию. Поскольку при $n > 6$ величина $k = 2\sin(\pi/n) < 1$, при $n > 6$ прогрессия убывает, и ее члены стремятся к нулю. Стало быть, при $n > 6$ группа $G_{2\pi/n}$ содержит сколь угодно короткие переносы.

Нетрудно выяснить, что сколь угодно короткие переносы имеет и группа $G_{2\pi/5}$. В этом случае возьмем $T_3 = T_1 + T_2$. $|T_3| = |T_1 + T_2| = 2\cos(2\pi/5)|T_1| = p|T_1|$, где $p < 1$, и мы снова можем построить последовательность трансляций, чьи длины стремятся к нулю.

Определение 8.1. Группа симметрий плоскости называется дискретной⁴, если она имеет кратчайший ненулевой перенос;

⁴ Дискретные группы движений плоскости принадлежат к т.н. кристаллографическим или Федоровским группам, открытым Е.С.Федоровым при изучении структуры кристаллов.

полунепрерывной, если она имеет кратчайший поворот и не имеет кратчайшего переноса и *вполне непрерывной*, если она не имеет кратчайшего поворота и кратчайшего переноса. СПМ называется дискретной, полунепрерывной или вполне непрерывной в зависимости от того, какова ее группа симметрий.

Теорема 8.2. *Чтобы многогранник имел дискретную СПМ, необходимо, чтобы он принадлежал классу M_2, M_3M_4 или M_6 .*

В следующей главе мы убедимся в том, что многогранники с дискретными СП имеются во всех этих классах, но не все многогранники из M_3M_4 и M_6 имеют дискретные СП.

Определение 8.3. *Пусть k – натуральное число, большее единицы. Тогда k -центром СПМ называется центр симметрии сети с углом $2\pi/k$.*

Определение 8.4. *Центры симметрии СПМ называются эквивалентными, если существует симметрия СПМ, отображающая один центр на другой.*

Теорема 8.5. *Если $M \in M_k$, то вектор, соединяющий два эквивалентных k -центра СПМ, является трансляцией сети.*

Пусть (рис. 8.2) O^1 и O^2 – два эквивалентных k -центра сети, A^1B^1 – произвольное ребро сети, A^2B^2 – его образ при той симметрии, которая отображает O^1 на O^2 (рис.8.2). Возьмем все образы A^1B^1 при поворотах относительно O^1 на углы, кратные $2\pi/k$, и все образы A^2B^2 при поворотах относительно O^2 на углы, кратные $2\pi/k$. Поскольку эти повороты являются симметриями сети, то все образы A^1B^1 и A^2B^2 будут ребрами сети. Мы получили две равных «вертушки». Перенесем первую из них на вектор O^1O^2 . Если при этом переносе она не отобразится на вторую, то минимальный угол между их черными отрезками будет больше нуля и меньше $2\pi/k$. Но в таком случае поворот, отображающий один из этих отрезков (ребер сети) на другой, будет симметрией сети с углом, меньшим, чем минимальный угол симметрии, что противоречит допущению. Значит, O^1O^2 – трансляция.

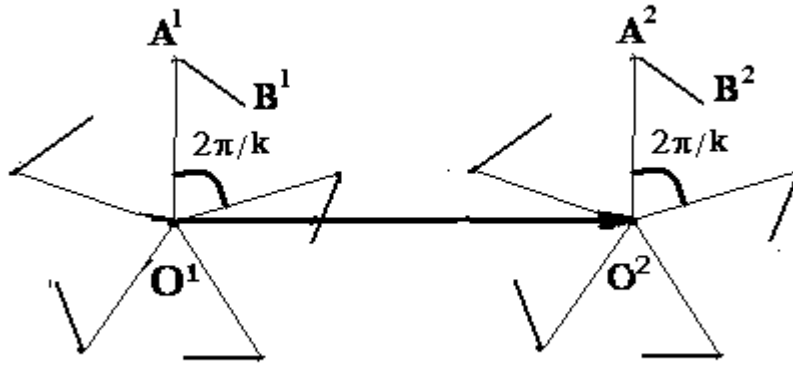


Рис.8.2.

8.3. Если $СПМ_k$ дискретна, все ее трансляции являются ЦЛК двух кратчайших и равных по длине трансляций, образующих угол $2\pi/k$.

Случай $k=2$ будет рассмотрен в следующей главе. Если $k=3,4,6$, то согласно 7.4 для каждой из этих сетей существуют две кратчайшие трансляции T_1 и T_2 , образующие углы $2\pi/3$, $\pi/2$ и $\pi/3$ соответственно, т.е. не параллельные между собой. Все их ЦЛК тоже являются трансляциями СПМ. Если отложить их из одной точки O , все их концы, как мы уже отмечали, образуют бесконечную ромбическую или квадратную решетку (рис.8.3) со стороной, равной длине кратчайшей трансляции сети.

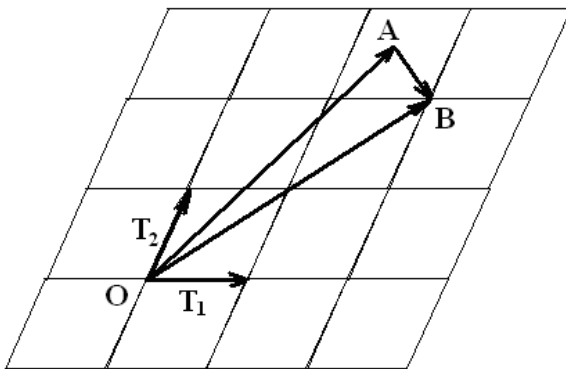


Рис.8.3.

Предположим теперь, что существует перенос T , не представимый в виде ЦЛК(T_1, T_2). Отложим его вектор из той же точки O и пусть точка A – конец вектора T . Точка A находится внутри или на границе какого-то квадрата или ромба решетки. Пусть B – ближайший к A узел решетки. Тогда $|AB|$ меньше, чем длина кратчайшего переноса. Поскольку вектор $AB = OB - OA$ является переносом, мы пришли к противоречию.

8.4. Если СПМ недискретна, решетка любой вершины многогранника является всюду плотной на плоскости перекатывания, т.е. для любой вершины многогранника и любой точки плоскости найдется такой след этой вершины, что расстояние между ним и заданной точкой плоскости будет меньше любого наперед заданного положительного числа.

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное наперед заданное число, P – наперед заданная точка плоскости перекатывания и A – произвольная вершина многогранника. Если СПМ не дискретна, то, согласно доказанному выше, существует ее трансляция длины, меньшей, чем ε , и существует трансляция той же длины, образующая с ней ненулевой угол. Любая ЦЛК этой пары трансляций тоже является трансляцией. Возьмем произвольный след A^1 вершины A . Любая трансляция этого следа тоже является следом A . Рассмотрим образы A^1 при всевозможных трансляциях, каждая из которых является ЦЛК двух исходных. Они образуют неограниченную ромбическую решетку (рис.8.3), так что точка P содержится в одном из базовых ромбов решетки. Расстояние от нее до ближайшего узла решетки не превосходит ε , что и требовалось.

Задача (трудная). Докажите, что множество поворотных симметрий $СПМ_\infty$ всюду плотно в множестве всех поворотов плоскости перекатывания в том смысле, что для каждого $\varepsilon > 0$, каждой точки P плоскости и каждого угла α найдется такая поворотная симметрия, что расстояние от ее центра до точки P и модуль разности между ее углом и α будет меньше ε .

§9,

в котором проясняется, до чего могут докатиться многогранники с недискретными сетями перекатывания

С помощью полученных результатов можно выяснить, может ли многогранник, перекатываясь из данного положения, накрыть той или иной гранью заранее выбранную область на плоскости перекатывания. (Чтобы эта задача имела смысл, нужно, чтобы область A была допустимой, то есть могла бы уместиться во внутренней области многоугольника, равного следу хотя бы одной грани G многогранника).

Результаты предыдущего параграфа позволяют предположить, что верна

Теорема 9.1.

а) чтобы выпуклый многогранник при перекатываниях мог накрыть заданной гранью любую допустимую для нее область, необходимо и достаточно, чтобы СПМ была вполне непрерывной;

б) чтобы выпуклый многогранник при перекатываниях мог накрыть заданной гранью любой допустимый для нее круг на плоскости перекатывания, необходимо и достаточно, чтобы СПМ не была дискретной.

Доказательства этих утверждений основаны на детализации рассуждений параграфа 1.7. и не представляют особого интереса. Можно даже построить путь, по которому $M \in M_\infty$ из заданного положения накатится заданной гранью G_1 на заданную допустимую область D . Для этого берется содержащий ее многоугольник F^1 , конгруэнтный G . Сначала M перекатывается на грань G_1 . Если кривизна хотя бы одной вершины G_1 несоизмерима с π , многогранник крутится вокруг этой вершины, пока не повернется на угол, очень близкий к углу α между G и F^1 . Если кривизны всех вершин G_1 соизмеримы с π , то на другой грани G_2 есть вершина, чья кривизна несоизмерима с π . Тогда M перекатывается на G_2 и далее перекатывается вокруг этой вершины нее до тех пор, пока не повернется на угол, очень близкий к α . Затем M обратным путем возвращается с G_2 на G_1 , но теперь след G^1 грани G_1 почти параллелен F^1 . Далее подыскиваются две достаточно короткие трансляции U и V равной длины, и выполняется такая их ЦЛК $(U, V) = mU + nV$, которая переводит G^1 очень близко к F^1 . Остается выполнить отвечающее этой трансляции перекатывание, чтобы многогранник накрыл гранью G_1 область D .

§10,

в котором исследуются простейшие сети перекатывания

Выше мы установили, что дискретные СП могут быть только у многогранников из классов M_2, M_3, M_4 и M_6 , но это не значит, что все многогранники из этих классов имеют дискретные сети. Множество многогранников из M_k ($k = 2, 3, 4, 6$) с дискретными СП обозначим M_k^d .

Посмотрим, что представляют собой многогранники класса M_2 . По определению, НОД кривизн вершин каждого такого многогранника равен π . Поскольку кривизна выпуклого многогранного угла всегда меньше 2π , это значит, что кривизны всех вершин равны π , а так как по теореме Декарта сумма кривизн всех вершин выпуклого многогранника равна 4π , то вершин ровно 4. Если они лежат в одной плоскости, мы имеем дело с двусторонним четырехугольником, углы которого равны, то есть с прямоугольником, если нет – с тетраэдром. С сетью перекатывания двустороннего прямоугольника и ее симметриями мы познакомились в параграфе 1.

Если M – тетраэдр, рассмотрим его «звездчатую» развертку, которая получается разрезанием тетраэдра по ребрам, исходящим из одной вершины (цветной рис.1). Кривизны всех вершин тетраэдра равны π , следовательно, $\angle A^1 B^1 A^2$, $\angle A^2 D^1 A^3$ и $\angle A^1 C^1 A^3$ – развернутые углы, а развертка является треугольником со средними линиями. Они делят треугольник на четыре равных треугольника, так что данный тетраэдр – равногранный. Его СП состоит из равных треугольников, заполняющих плоскость, причем следы разных граней не имеют общих внутренних точек. При этом каждое из шести ребер тетраэдра имеет свою сеть из равноотстоящих параллельных прямых, а решетки разных вершин не имеют общих точек.

Легко видеть, что вершины равногранного тетраэдра имеют раскрашены в 4 цвета, грани - в те же 4 цвета, а ребра – в еще в 6. Все симметрии СПМ₂ являются либо трансляциями, либо центральными симметриями с центрами в узлах сети. Все трансляции этой СП суть вектора, соединяющие одноцветные (эквивалентные) узлы. Из них можно выделить две кратчайшие равной длины, направленные по непараллельным линиям сети. Тогда все прочие трансляции являются их ЦЛК.

Можно выделить и другие пары векторов, чьи ЦЛК образуют все множество трансляций.

Теорема 10.1. Для того, чтобы множество ЦЛК(T_1, T_2) совпадало с множеством ЦЛК (U_1, U_2), где $U_1 = m_1 T_1 + m_2 T_2$ и $U_2 = n_1 T_1 + n_2 T_2$, а m_1, m_2, n_1, n_2 – целые, необходимо и достаточно, чтобы $|m_1 n_2 - m_2 n_1| = 1$.

В самом деле, ясно, что каждая ЦЛК(U_1, U_2) является ЦЛК(T_1, T_2). Чтобы было верно и обратное, нужно, чтобы T_1 и T_2 можно было представить в виде ЦЛК(U_1, U_2), то есть отыскать такие целые p_1, p_2, q_1, q_2 , что выполняются уравнения $p_1 U_1 + p_2 U_2 = T_1$, $q_1 U_1 + q_2 U_2 = T_2$. Подставляя в них вместо U_1 и U_2 их выражения через T_1 и T_2 , и, пользуясь однозначностью разложения вектора по двум непараллельным векторам, получим систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} (1) \quad & p_1 m_1 + p_2 n_1 = 1, \\ (2) \quad & p_1 m_2 + p_2 n_2 = 0, \\ (3) \quad & q_1 m_1 + q_2 n_1 = 0, \\ (4) \quad & q_1 m_2 + q_2 n_2 = 1. \end{aligned}$$

(1) означает, что m_1 и n_1 взаимно просты, (4) - что взаимно просты m_2 и n_2 . Запишем (2) в виде $p_1 m_2 = - p_2 n_2$. Пусть ни одно из участвующих в нем чисел не равно 0. Тогда, поскольку m_2 и n_2 не имеют общих делителей, кроме 1, p_1 должно делиться на n_2 , а p_2 - на m_2 , причем частные от деления должны быть равны по модулю и

противоположны по знаку, т.е. при некотором k выполняются соотношения $p_1 = kn_2$, $p_2 = -km_2$. Подставляя эти равенства в первое уравнение, получим, что $(m_1n_2 - m_2n_1)k = 1$. Произведение двух целых чисел может быть равно единице лишь тогда, когда они оба равны или 1 или -1 , т.е. $|m_1n_2 - m_2n_1| = 1$, что и требовалось. Если $m_1n_2 - m_2n_1 = 1$, можно взять $p_1 = n_2$, $p_2 = -m_2$, $q_1 = -n_1$, $q_2 = m_1$, а если $m_1n_2 - m_2n_1 = -1$, положить $p_1 = -n_2$, $p_2 = m_2$, $q_1 = n_1$, $q_2 = -m_1$, чтобы уравнения (1)-(4) превратились в тождества. Нулевые случаи разбираются отдельно и приводят к тому же равенству $|m_1n_2 - m_2n_1| = 1$.

Кроме трансляций, группа симметрий $СПМ_2$ содержит центральные симметрии с центрами в узлах решетки.

Задачи (трудные).

а) Докажите, что условие $|m_1n_2 - m_2n_1| = 1$ эквивалентно тому, что параллелограмм со сторонами $U_1 = m_1T_1 + m_2T_2$ и $U_2 = n_1T_1 + n_2T_2$, где m_1, m_2, n_1, n_2 – целые, равновелик параллелограмму со сторонами T_1 и T_2 .

б) Докажите, что группа симметрий M_2 порождается композициями трех любых центральных симметрий с центрами, образующими треугольник той же площади, что треугольник, образованный тремя ближайшими узлами решетки M_2 .

в) Даны три разноцветные точки, не лежащие на одной прямой. Каждую из них разрешается поворачивать на развернутый угол относительно любой другой, и оставлять след того же цвета. Что представляет собой множество следов каждой из трех точек и каково объединение этих множеств?

§11,

в котором строятся дискретные решетки квадратных сетей перекатывания многогранников класса M_4 .

По определению, кривизны вершин многогранников класса M_4 имеют НОД, равный $\pi/2$, то есть могут принимать значения $\pi/2$, π и $3\pi/2$. Следы вершин с кривизной $\pi/2$ и $3\pi/2$ являются центрами симметрии сети при поворотах на углы, кратные $\pi/2$, то есть 4-центрами. Следы вершин с кривизной π являются, как минимум, центрами центральных симметрий, то есть 2-центрами, но могут быть и 4-центрами. Соответственно этому мы будем называть 4-вершинами вершины с кривизной $\pi/2$ и $3\pi/2$, и 2-вершинами – вершины с кривизной π .

Согласно доказанному выше, множество трансляций дискретной сети перекатывания многогранника класса M_4 состоит из ЦЛК двух

кратчайших трансляций, равных по длине и образующих прямой угол, а все следы 4-вершины многогранника, поскольку они являются 4-центрами, можно получить из одного следа всевозможными трансляциями. Отсюда следует

11.1. *Решетки всех 4-вершин многогранника класса M_4^d являются квадратными с шагом, равным длине кратчайшей трансляции.*

Нарисуем решетку какой-нибудь 4-вершины многогранника из M_4 . Такая вершина непременно найдется, ибо в противном случае многогранник принадлежал бы классу M_2 . Покрасим точки ее решетки в синий цвет (цветной рис.2а) и обозначим буквой **С**. Согласно 1.4, решетки других 4-вершин либо совпадают с этой решеткой, либо не имеют с ней общих точек. В тоже время они являются ее 4-центрами. Но 4-центрами симметрии квадратной решетки являются либо ее точки, либо центры ее квадратов, которые образуют решетку с тем же шагом. Эту вторую решетку мы обозначим **К** и припишем ей красный цвет. Объединение решеток **С** и **К** (рис.2b) является двуцветной квадратной решеткой **СК** с более мелким шагом. Эта решетка уже не имеет 4-центров, отличных от ее узлов. Из объемных фигур такую решетку имеет, например, куб, из плоских – нарисованный на ней 8-угольник с равными углами. (Напомним, что квадрат имеет другую, 4-цветную решетку класса M_2).

Разберемся с решетками 2-вершин. Поскольку каждый след 2-вершины является как минимум 2-центром, решетка 2-вершины может либо совпадать с решеткой какой-то 4-вершины, либо располагаться в 2-центрах этой решетки. 2-центрами квадратной решетки являются середины сторон ее квадратов. Они образуют более мелкую, чем красная и синяя, квадратную решетку **З**, которую можно выкрасить в зеленый цвет. Объединение решеток **С** и **З** является решеткой сети перекатывания – ее отпечатывает, например, двусторонняя прямоугольная трапеция, малое основание которой, короткая боковая сторона и большое основание относятся как **1:2:3** (рис.2с). Объединение решеток **С,К,З** является трехцветной квадратной решеткой, не имеющей иных центров симметрии, чем ее узлы. Она является решеткой перекатывания, например, прямоугольной трапеции, малое основание которой, короткая боковая сторона и большое основание относятся как **1:1:2** (рис.2d), и правильной треугольной бипирамиды с прямыми углами при вершинах, чья развертка нарисована там же. Что касается решетки **С**, то позднее мы докажем, что многогранники классов M_4 и M_3 не могут иметь одноцветных решеток.

Упражнение. *Соедините два ближайших центра симметрии квадратной решетки **К** и **З** синим отрезком **ЗК** и размножьте его*

поворотами на прямые углы относительно красных и синих точек, и поворотами на развернутые угла относительно зеленых точек. Какая сеть при этом получится? Размножьте таким же образом зеленый отрезок красный отрезок $CЗ$, зеленый отрезок $СК$ и серый отрезок $ЗЗ$.

Квадрат с вершинами в 4-х ближайших точках решетки рис.2d называется *фундаментальным*, так как его образы при всевозможных симметриях сети разбивают плоскость на конгруэнтные ему части, и внутри него нет двух эквивалентных точек, то есть таких, которые можно перевести друг в друга симметрией сети – так что устройство всей бесконечной дискретной сети перекачивания *полностью определяется той ее частью, которая находится в пределах фундаментальной области.*

§12,

в котором формулируются условия, позволяющие отправить развернутый многогранник за дискретную решетку

Пусть многогранник из M_4 имеет дискретную сеть перекачивания. Прокатим его (в случае необходимости двигаясь обратным путем) так, чтобы каждая его грань оставила ровно один след. Полученная таким образом совокупность следов, имеющая форму многоугольника (вообще говоря, невыпуклого) называется *связной разверткой многогранника*. Вершины этой развертки являются узлами сети его перекачивания, которые, как мы установили выше, служат узлами некоторой квадратной решетки. Следовательно, *связную развертку многогранника из M_4^d можно разместить вершинами в узлах некоторой квадратной решетки.*

Определение 12.1. *Многоугольник, который можно разместить вершинами в узлах некоторой квадратной решетки, называется квадратно-решеточным.*

12.2 *Чтобы многогранник класса M_4 имел дискретную сеть перекачивания, необходимо и достаточно, чтобы его связная развертка была квадратно-решеточна.*

Необходимость условия мы уже доказали. Убедимся в его достаточности, т.е. в том, что если к связной развертке многогранника из M_4 , расположенной вершинами в узлах квадратной решетки, пристраивать новые следы граней многогранника, они тоже попадут вершинами в узлы решетки.

Действительно, если связная развертка многогранника из M_4 расположена вершинами в узлах квадратной решетки, то она содержит следы всех ребер многогранника - причем каждое ребро, через которое

многогранник катили, печатая развертку, представлено на ней одним следом и принадлежит ровно двум граням развертки, т.е. является внутренним ее ребром, а все прочие – двумя следами и принадлежат только одной грани развертки, т.е. являются ее граничными ребрами. Рассмотрим два эквивалентных граничных ребра развертки A^1C^1 и A^2C^2 (рис.12.1).

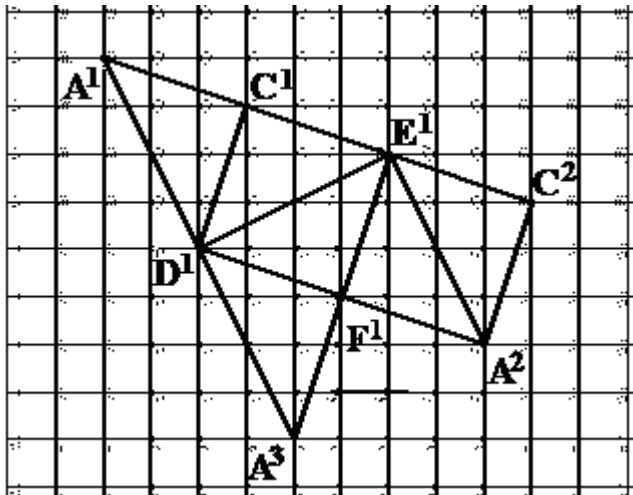


Рис.12.1. Связная развертка правильной треугольной бипирамиды с прямыми углами при двух противоположных вершинах.

Движение, отображающее A^1C^1 на A^2C^2 , является симметрией СП. Это движение является либо параллельным переносом, либо поворотом на угол, кратный $\pi/2$, и, следовательно, переводит квадратную решетку, в узлах которой расположены вершины развертки, в себя. Следовательно, все образы связной развертки при движениях, отображающих одно ее ребро на эквивалентное ему ребро, тоже располагаются в узлах сети. Это значит, что многогранник, отпечатавший свою связную развертку, дальше будет перекачиваться так, что его вершины каждый раз будут попадать в узлы исходной решетки, а решеткой перекачивания данного многогранника будет какая-то ее правильная подрешетка.

Теперь представим себе, что многогранник из M_4^d стоит на своей решетке перекачивания, и будем считать, что при перекачиваниях данная решетка сама оставляет следы на его поверхности. Эти следы разбивают поверхность многогранника на равные квадраты (возможно, перегнутые по ребрам многогранника). И наоборот, если поверхность некоторого многогранника можно разбить на равные квадраты, то сеть его перекачивания дискретна, поскольку вершины этих квадратов при перекачиваниях будут печатать узлы некоторой квадратной решетки. Значит, справедливо

12.2. *Чтобы многогранник имел дискретную сеть перекачивания с квадратной решеткой, необходимо и достаточно, чтобы его*

поверхность можно было разбить на равные квадраты (возможно, перегнутые по ребрам многогранника).

Выясним теперь, что нужно потребовать от $M \in M_4$, чтобы существовала такая квадратная решетка, в узлах которой можно было бы разместить вершины его связной развертки. Многоугольники, которые обладают таким свойством, будем называть *квадратно-решеточными*. Очевидно, что истинно предложение

12.3. *Многоугольник квадратно-решеточен тогда и только тогда, когда в некоторой прямоугольной системе координат его вершины имеют целые абсциссы и ординаты.*

Этот признак можно сделать конструктивным, если заметить, что имеет место

12.4. *Треугольник является квадратно-решеточным тогда и только тогда, когда тангенсы его углов рациональны.*

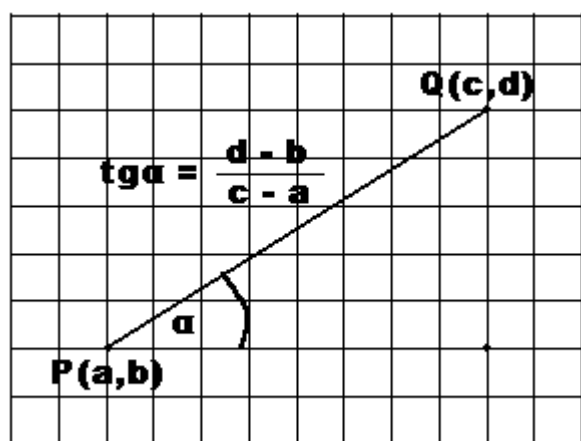


Рис.12.2

Необходимость. Угловой коэффициент прямой PQ, проходящей через целочисленные точки $P = (a, b)$ и $Q = (c, d)$, то есть тангенс угла между нею и осью абсцисс (рис.12.2) рационален, поскольку равен $(d - b)/(c - a)$. Если обозначить его k , уравнение прямой PQ, определяемое из соотношения $(y - b)/(x - a) = (d - b)/(c - a)$, имеет вид $y = kx + m$, где m тоже рационально. (Обратное неверно – не всякая прямая с таким уравнением проходит через целые точки). Прямые, уравнения которых имеют рациональные коэффициенты, будем называть *рациональными*. Отметим четыре свойства рациональных прямых:

12.5.

- 1) *Рациональные прямые пересекаются в рациональной точке.*
- 2) *Тангенс угла между рациональными прямыми рационален.*

3) Прямая, образующая с рациональной прямой угол с рациональным тангенсом, имеет рациональный угловой коэффициент.

4) Прямая с рациональным угловым коэффициентом, проходящая через некоторую рациональную точку, рациональна.

- 1) следует из того, что уравнение $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$ имеет рациональное решение, 2) и 3) - из того, что угол между двумя прямыми равен сумме или разности между углами их наклона к оси X , а тангенс суммы и разности углов является рациональной функцией тангенсов этих углов, то есть k_1 и k_2 .
4) - из того, что уравнение $p = kq + b$, выражающее условие прохождения прямой $y = kx + b$ с рациональным k через рациональную точку (p,q) , имеет решением рациональное число b .

Чтобы завершить доказательство необходимости, остается заметить, что углы квадратно-решеточного треугольника – это углы между рациональными прямыми, а эти углы, согласно свойству 2), имеют рациональные тангенсы.

Достаточность. Пусть треугольник ABC имеет углы с рациональными тангенсами a, b, c . Чтобы доказать возможность его размещения в узлах некоторой квадратной решетки, выберем декартову систему координат с началом в точке A , где и единичным вектором AB , направленным по оси абсцисс.

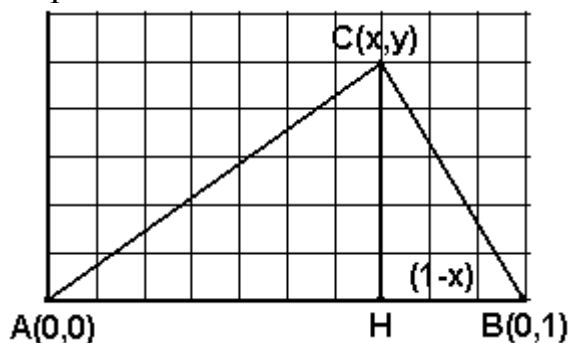


Рис.12.3

Тогда $B = (0,1)$. Пусть точка C имеет в этом базисе координаты (x,y) . Тогда $|y/x| = |a|$; $|y/(1-x)| = |b|$. Вычисляемые из этой системы x и y рациональны в силу рациональности a и b , то есть точка C имеет рациональные координаты. Найдем их НОД и введем новую систему координат с началом в той же точке и теми же координатными осями, но с единицей измерения, равной этому НОД. В новом базисе все три вершины A, B, C имеют целочисленные координаты, так что треугольник ABC является квадратно-решеточным. \square

Задача. Докажите, что правильный треугольник не является квадратно-решеточным.

Теорема 12.6. Многоугольник является квадратно-решеточным тогда и только тогда, когда диагонали, исходящие из одной вершины, разбивают его на квадратно-решеточные треугольники.

Необходимость условия очевидна, поскольку все треугольники, определяемые тройкой вершин квадратно-решеточного многоугольника, являются квадратно-решеточными.

Чтобы установить достаточность, нужно показать, что присоединение к квадратно-решеточному n -угольнику квадратно-решеточного треугольника, с которым он имеет общую сторону, приводит к квадратно-решеточному $(n+1)$ -угольнику. В самом деле, пусть квадратно-решеточный треугольник ABC присоединяется к стороне AB квадратно-решеточного многоугольника. Разместим этот многоугольник вершинами в целочисленных точках некоторой системы координат (рис.12.4):

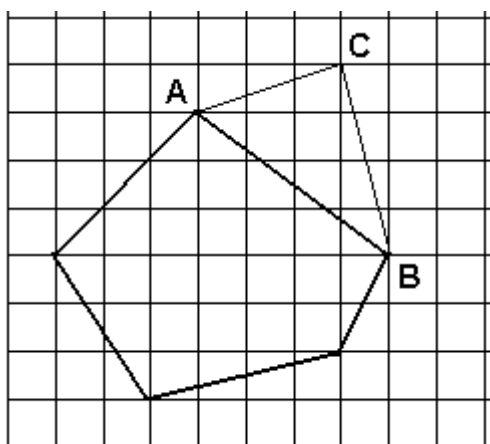


Рис.12.4

Так как A и B – целочисленные точки, а углы CAB и CBA имеют рациональные тангенсы, то из свойств 3 и 4 следует, что CA и CB – рациональные прямые, а из свойства 1 – что C имеет рациональные координаты. Если, как в 2.2.7., перейти к новой системе координат, единицей которой будет НОД координат точки C , мы обнаружим, что все вершины нашего $(n+1)$ – угольника целочисленны, и он квадратно-решеточен. \square

Собирая полученные результаты воедино, мы приходим к практическому критерию дискретности $СПМ_4$:

Теорема 12.7. Чтобы сеть перекатывания многогранника класса M_4 была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы каждую его грань можно было разбить диагоналями, исходящими из какой-то одной вершины, на треугольники, чьи углы имеют рациональные тангенсы.

Задача. Докажите, что двусторонний многоугольник класса M_4 квадратно-решеточен тогда и только тогда, когда любые две его параллельные и перпендикулярные стороны относятся как $m:n$, а те, что образуют углы $\pi/4$ и $3\pi/4$, относятся как $m\sqrt{2}:n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

§13,

в котором строятся решетки для многогранников класса M_3

Поскольку НОД кривизн вершин многогранника из M_3 равен $2\pi/3$, его вершины могут иметь кривизну $2\pi/3$ или $4\pi/3$. Так как сумма кривизн всех вершин равна 4π , число вершин многогранника из M_3 не больше 6. Множество геометрически различных углов симметрии сети его перекатывания состоит всего из двух величин: $\pm 2\pi/3$. Согласно 1.1.2, две разных вершины выпуклого многогранника либо имеют общую решетку, либо их решетки не имеют ни одной общей точки. Все следы каждой вершины многогранника, то есть все узлы его СП являются центрами ее симметрии с минимальными по абсолютной величине углами ($\pm 2\pi/3$) или, что то же самое, являются 3-центрами.

Множество многогранников из M_3 с дискретными сетями перекатывания обозначим M_3^d . Все следы любой вершины $M \in M_3^d$ можно получить из одного ее следа всевозможными трансляциями, каждая из которых является ЦЛК двух кратчайших, образующих угол $2\pi/3$. Значит, решетки всех вершин $M \in M_3^d$ равны между собой, причем каждая из них является правильно-треугольной, а расстояние между ближайшими ее узлами, называемое *шагом решетки*, равно длине кратчайшей трансляции сети.

Нарисуем решетку какой-нибудь одной вершины $M \in M_3^d$, пометим ее точки синим цветом (цветной рис.3а) и назовем решеткой S .

Как может быть расположена относительно нее решетка другой вершины – K ? Согласно 1.4, она либо совпадает с первой, либо не имеет с ней общих точек. Узлы решетки K являются центрами симметрии сети и, стало быть, являются также центрами симметрии решетки S . Но центры симметрии правильно-треугольной решетки – это либо ее точки, либо центры ее треугольников. Значит, K либо совпадает с S , либо располагается в центрах каких-то ее треугольников. Если K не совпадает с S , пометим ее точки красным цветом. Объединение решеток K и S

является правильно-шестиугольной решеткой (цветной рис.3б). Ее имеет, например, правильный двусторонний 6-угольник. При этом некоторые центры симметрии решетки \mathcal{C} , оставшиеся незанятыми, образуют решетку \mathcal{Z} , конгруэнтную решеткам \mathcal{C} и \mathcal{K} . Точки \mathcal{Z} пометим зеленым цветом (цветной рис.3в). После этого свободных центров симметрии уже не остается, так что решетки прочих вершин совпадают с одной из построенных решеток, объединение которых является правильно-треугольной решеткой с более мелким шагом. Такую трехцветную решетку имеет, в частности, правильный треугольник. У трехцветной решетки нет иных центров симметрии, кроме ее точек.

Дальше мы покажем, что все вершины многогранника класса \mathcal{M}_3^d (равно как и \mathcal{M}_4^d) не могут иметь одну решетку, так что ни один многогранник из \mathcal{M}_3^d не может отпечатать решетку рис.3.1а.

Упражнение.

- 1) Докажите, что объемный многогранник из \mathcal{M}_3 не может иметь двуцветную решетку 3б.
- 2) Докажите, что правильный октаэдр имеет решетку 3в, причем вершины каждой его грани имеют разные решетки, а противоположные вершины – одну решетку.

Правильный треугольник с вершинами в трех ближайших разноцветных центрах треугольной СП сети называется *базовым*, а ромб, образованный двумя такими треугольниками с общей стороной, является *фундаментальным ромбом* СП, поскольку внутри него нет двух эквивалентных точек.

Чтобы перенести критерии дискретности с квадратной решетки на треугольную, спроектируем одну на другую. Как это делается, показано на рис.13.2, где равносторонний треугольник \mathbf{ABE} , образованный диагоналями граней куба, ортогонально спроектирован в равнобедренный прямоугольный. Обратное проектирование переводит квадратную решетку с базовым квадратом \mathbf{ABCD} в треугольную (ромбическую) решетку на плоскости \mathbf{AEC} .

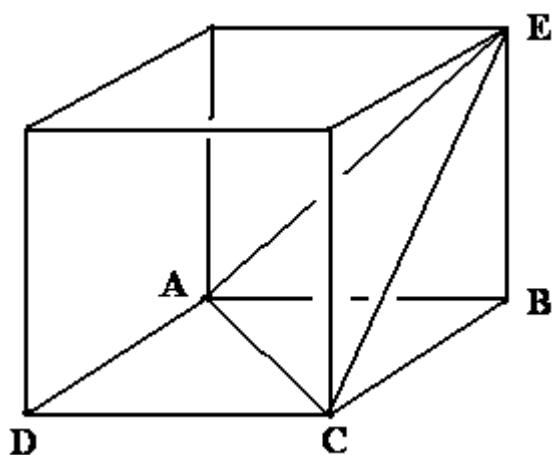


Рис.13.2

Задача. Докажите, что при этом каждому углу с рациональным тангенсом на плоскости AEC соответствует угол с тангенсом вида $r\sqrt{3}$, где r – рационально, на плоскости ABC , и наоборот.

Теорема 13.1. Чтобы выпуклый многоугольник был треугольно-решеточным, необходимо и достаточно, чтобы диагонали, проведенные из одной вершины, разбивали его на треугольники, углы которых имеют тангенсы вида $r\sqrt{3}$, где r – рационально.

Теорема 13.2. Чтобы сеть перекатывания многогранника класса M_3 была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы диагоналями, проведенными из одной вершины, каждую его грань можно было разбить на треугольники с углами, тангенсы которых имеют вид $r\sqrt{3}$, где r – рационально.

Теорема 13.3. Чтобы сеть перекатывания многогранника класса M_3 была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы его поверхность можно было разбить на равные ромбы с углом $\pi/3$.

§14,

в котором строятся решетки для многогранников класса M_6

Кривизны всех вершин $M \in M_6$ кратны $\pi/3$. Вершины с кривизной $\pi/3$ и $5\pi/3$ считаются **6-вершинами**, с кривизной $2\pi/3$ и $4\pi/3$ – **3-вершинами**, с кривизной π – **2-вершинами**

Как и в случаях M_3 и M_4 , множество трансляций дискретной сети перекатывания многогранника класса M_6 состоит из ЦЛК двух кратчайших трансляций, равных по длине, но в данном случае образующих угол $\pi/3$. Соответственно, решетки вершин многогранника

класса M_6^d с кривизнами $\pi/3$ и $5\pi/3$ являются правильно-треугольными с шагом, равным длине кратчайшей трансляции.

Такая решетка не имеет **6**-центров, отличных от ее точек, поэтому все вершины минимальной и максимальной кривизны имеют общую решетку. Следы **3**-вершин являются, как минимум, **3**-центрами. **3**-центры правильно-треугольной решетки – центры ее треугольников, и если один след такой вершины попадет в **3**-центр СП, его повороты относительно **6**-центров заполнят центры всех треугольников исходной решетки (синей) и образуют правильно-шестиугольную решетку (красную). **2**-центры правильно-треугольной решетки – середины сторон ее треугольников. Если один след вершины с кривизной π попадет в **2**-центр СП, его повороты относительно **6**-центров заполнят середины всех сторон треугольников исходной решетки и образуют решетку, состоящую из правильных шестиугольников и правильных треугольников (зеленую). Поэтому вершины многогранника из M_6^d могут иметь самое большее три разных решетки – синюю из **6**-центров, красную из **3**-центров и зеленую из **2**-центров (рис.14.1).

Одноцветная решетка здесь возможна, но только синяя, из **6**-узлов (рис.14.1a). Ее имеет, например, правильный икосаэдр. Возможны также три двуцветных решетки – сине-красная (14.1b), красно-зеленая (14.1c) сине-зеленая (14.1d), и трехцветная (14.1e). Трехцветная решетка является частью некоторой правильно-треугольной решетки (14.1f), поэтому условия дискретности $СПM_6$ такое же, как для $СПM_3$:

14.1. Чтобы сеть перекатывания многогранника класса M_6 была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы все его грани были треугольно-решеточны.

Фундаментальной областью $СПM_6$ является, например, правильный треугольник, образованный **6**-центром и ближайшими к нему **3**-центрами сети.

14.2. Чтобы сеть перекатывания многогранника класса M_6 была дискретна, необходимо и достаточно, чтобы его поверхность можно было разбить на правильные треугольники (возможно, перегнутые).

§15,

в котором выпуклые многогранники разрезают, разворачивают и пересчитывают им ребра

Для построения СП многогранника нет необходимости физически его перекатывать – достаточно иметь набор его граней и знать, какими

ребрами прикладывать друг их к другу. Сейчас мы убедимся в том, что СП можно построить, поворачивая одну часть его связной развертки относительно какой-то вершины на угол, равный ее кривизне. Но прежде научимся изображать связную развертку на реберном скелете многогранника.

Если многогранник, точнее, его поверхность сделана из бумаги, для получения развертки эту поверхность разрезают (мы будем рассматривать только разрезы по ребрам) и разворачивают на плоскость. Договоримся каждый разрез изображать пунктирным ребром, а неразрезанные ребра оставлять целыми. На рис. 15.1 схематично показаны различные разрезы поверхности многогранника, имеющего, как параллелепипед, 8 вершин и 6 граней.

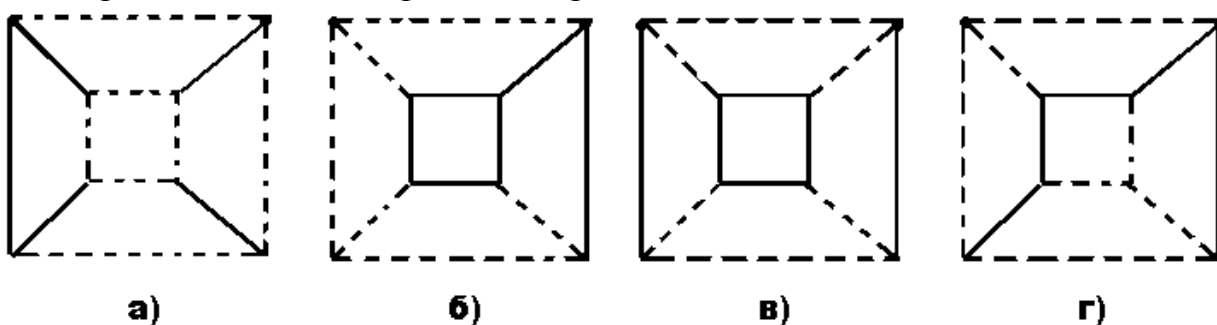


Рис.15.1

На рис.15.1а разрезы образуют два замкнутых контура или цикла, разрезающие поверхность многогранника на отдельные части, так что развертка не будет связной. На рис. 15.1б из одной вершины не исходит ни один разрез, и прилегающие к ней грани нельзя развернуть на плоскость. На рис. 15.1в разрезы не образуют связной сети, а грани куба образуют замкнутый «пояс», который нельзя развернуть на плоскость.

Исходя из этого, можно предположить, что верно

15.1. *При разрезании ребер выпуклого многогранника связная развертка получается тогда и только тогда, когда*

а) разрезы нигде не образуют цикла.

б) разрезы образуют связную сеть в том смысле, что по разрезанным ребрам можно пройти из одной вершины многогранника в другую.

Связный граф без циклов называется *деревом*, так что условия а,б требуют, чтобы разрезы образовывали дерево. Условие в) требует, чтобы вершинами дерева разрезов были все вершины М. Такое дерево называется *максимальным деревом разрезов (МДР)* (рис.15.1г). Прибавление нового разреза к максимальному дереву разрезов приводит

к тому, что образуется цикл из разрезов, и поверхность многогранника распадается на несвязные части – в самом деле, любой разрез соединяет две вершины, которые по условию б) уже соединены путем из разрезов, так что добавление нового разреза образует замкнутый контур.

Сопоставим многограннику еще один граф, показывающий соединение его граней и называемый гранным скелетом. Поставим внутри каждой грани многогранника по точке, и соединим тонкими жирными линиями пунктиром, если у граней есть общее ребро, и тонким, если такого ребра нет нет (рис.15.2).

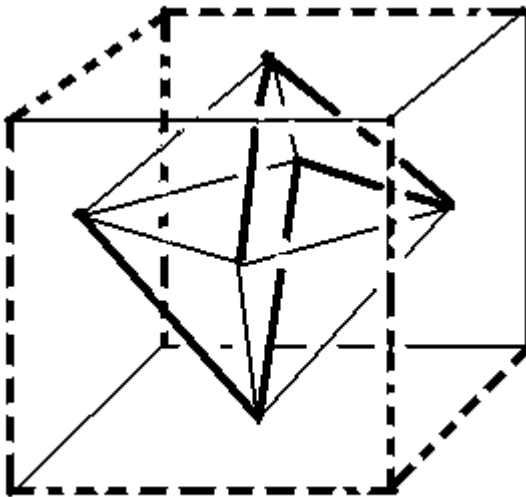


Рис.15.2. Граф разрезов (толстый пунктир) и граф связной развертки куба (толстые ребра внутреннего октаэдра)

Тогда каждой развертке соответствует граф. Граф связной развертки является *максимальным деревом граней (МДГ)*, поскольку включает все его грани и не имеет замкнутых контуров (“поясов”), которые не развертываются на плоскость.

15.2. МДР соответствует МДГ, и наоборот.

В самом деле, дереву реберных разрезов соответствует связный граф соединения граней, поскольку дерево не содержит циклов, делящих поверхность M на несвязные части. Этот граф не имеет «поясов», поскольку если бы он имел хотя бы один пояс, этот пояс делил бы поверхность многогранника на две части, а тогда, взяв по вершине в каждой из них, мы не смогли бы по разрезам пройти из одной в другую, что противоречило бы связности графа разрезов. И, наконец, этому графу принадлежат все грани, поскольку если бы хоть одна ему не принадлежала, все ее ребра были бы разрезаны, и граф разрезов имел бы цикл. Точно так же доказывается обратное. □

15.3. (Теорема Эйлера). Если V, G, P – числа вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, то $V+G=P+2$.

Упражнение. Докажите теорему Эйлера для N -угольной пирамиды, N -угольной бипирамиды и N -угольной призмы.

Определение. Вершина графа называется концевой, если из нее исходит только один отрезок.

Покажем от противного, что у всякого конечного дерева есть как минимум две концевые вершины. Действительно, если нет ни одной, то из каждой вершины исходят по меньшей мере два отрезка. Отправимся путешествовать из произвольной вершины, взяв за правило не проходить дважды по одному ребру. Если мы при этом попадем в вершину, в которую мы уже попадали, мы получим замкнутый контур, что противоречит определению дерева. Если мы все время будем попадать в новые вершины, то граф бесконечен. Значит, рано или поздно мы придем в вершину, в которую можно придти, но нельзя уйти по другому пути. Это и есть концевая вершина, которую также называют “ловушкой для черта” (согласно поверью, черт не может уйти той же дорогой, какой пришел). Исходя из одной ловушки для черта и руководствуясь прежним правилом не проходить дважды одного ребра, мы или сделаем цикл, что невозможно, или непременно придем в другую.

Теперь с помощью жестокой операции докажем, что число вершин дерева на 1 больше числа его ребер. Пусть соотношение между вершинами и ребрами имеет вид $V = E + z$, где z - неизвестное. Возьмем концевую вершину и отломим ее вместе с концевым ребром. Граф останется деревом, поскольку мы не нарушили связности и не сделали цикла. У нового дерева числа вершин и ребер отличаются на то же число z . Продолжим отламывать концевые ребра до тех пор, пока не останется одно ребро с двумя вершинами, для которой $z=1$. Значит, то же значение z было у исходного дерева.

Пусть P_k - число разрезанных ребер многогранника, оно же число ребер МДР, и пусть P_z - число ребер МДГ, которое по определению равно числу неразрезанных ребер многогранника. Тогда $P_k + P_z = P$. Поскольку разрезы исходят из всех вершин, $P_k + 1 = V$, а поскольку число вершин дерева связной развертки равно числу граней многогранника, $P_z + 1 = G$. Складывая два последних уравнения и учитывая первое, получаем теорему Эйлера. Из нее, как показано в параграфе 1.3, следует теорема Декарта. □

Задача. Докажите, что число ребер связной развертки многогранника равно $2B + \Gamma - 3$, а число ее вершин равно $2(B - 1)$, где B и Γ – число вершин и граней многогранника.

§16,

в котором развернутый многогранник становится ползающим многоголовым чудовищем

Одну часть связной развертки можно поворачивать относительно другой так, чтобы получать новую связную развертку и тем самым строить СПМ. Для этого нужно найти на развертке концевую вершину – такую, которая имеет только один след, провести из нее новый разрез, делящий развертку на две части, повернуть одну часть относительно другой на угол, равный кривизне разрезанной вершины и произвести склейку. При этом всегда есть выбор, какую из частей поворачивать относительно другой, так что все ЭДР можно осуществлять, оставляя некоторую избранную грань неподвижной. Такое преобразование связной развертки называется ее *элементарным движением (ЭДР)*. При элементарных движениях развертка может всячески складываться и раскладываться вокруг некоторой неподвижной грани, а если предоставить свободу всем граням, может ползти по плоскости наподобие амебы, выбрасывающей свои ложконожки (рис.16.1).

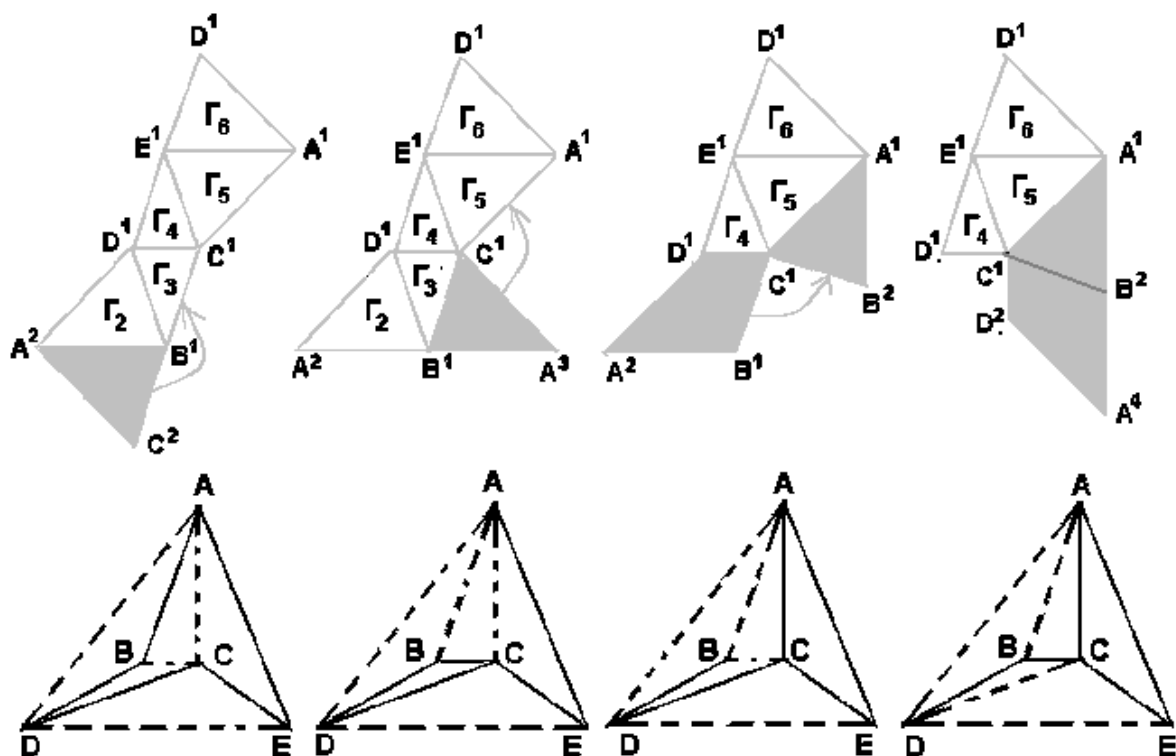


Рис.16.1

На МДР элементарному движению развертки соответствует «пунктиризация» черного ребра, исходящего из концевой вершины, и замена пунктирного ребра на сплошное, которое из нее исходило прежде.

16.1. ЭДР позволяют сделать сплошным любое пунктирное ребро.

Если пунктирное ребро P_1 – концевое для МДР, оно превращается в сплошное одним ЭДР. Если $P_1 = V_1V_2$ – неконцевое ребро, покажем, что его можно сделать концевым с помощью некоторой последовательности ЭДР. Обозначим через D_1 и D_2 деревья, на которые P_1 делит МДР. V_1 и V_2 являются вершинами D_1 и D_2 соответственно.

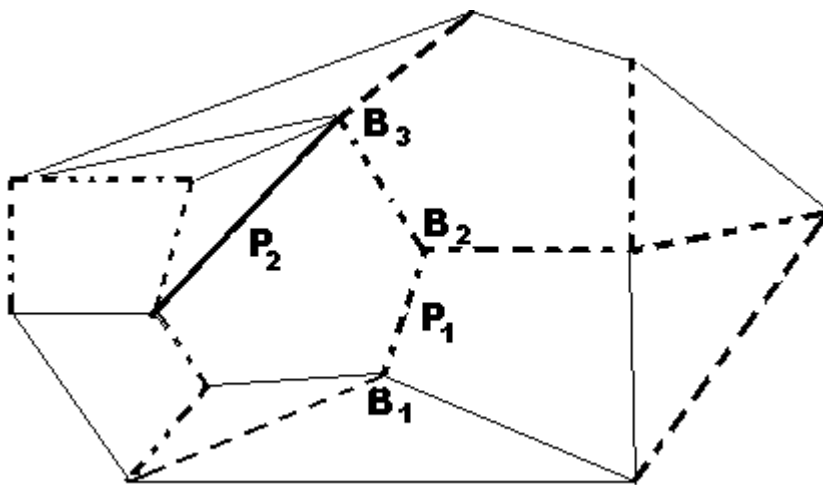


Рис.16.2

Поскольку две вершины дерева соединяет только один путь по его ребрам (если бы они соединялись двумя путями, дерево содержало бы цикл, что невозможно по определению), вершины дерева D_1 и вершины дерева D_2 не соединяет ни одно пунктирное ребро, кроме P_1 . Покажем, что в D_2 есть хотя бы одна вершина V_3 , отличная от V_2 , из которой исходит черное ребро в вершины D_1 . В самом деле, если такой вершины нет, то из вершин D_2 можно пройти в вершины D_1 только по красным ребрам, а каждый такой путь непременно содержит P_1 и V_2 . Но тогда удаление одного ребра P_1 привело бы к распадению реберного скелета многогранника на две несвязные части, что невозможно.

Итак, в D_2 существует вершина V_3 , отличная от V_2 , из которой исходит черное ребро P_2 в вершину D_1 . V_3 разбивает МДР на два дерева. Одно из них содержит дерево D_1 и вершину V_2 . Возьмем оставшееся дерево, D_3 , которое является частью D_2 . Число его ребер меньше, чем число ребер D_2 .

Теперь будем вести индукцию по числу ребер D_2 .

Пусть D_2 содержит одно ребро – P_1 . Одной из вершин P_1 является V_2 . Тогда, по доказанному, из другой его вершины исходит черное ребро в D_1 . Одним ЭДР ребро P_1 можно зачернить, одновременно «закраснив» черное ребро.

Пусть, далее, доказана возможность превращения любого пунктирного дерева D_2 , содержащего число ребер, которое не превосходит k . Пусть D_2 содержит $(k+1)$ ребро. Найдем описанные выше вершину V_3 и дерево D_3 . В D_3 , как было отмечено, меньше вершин, чем в D_2 , и оно подпадает под индукционное предположение. Сделав это дерево сплошным, мы сделаем V_3 концевой вершиной. Исходящее из нее пунктирное ребро делается сплошным одним ЭДР, а к D_1 при этом добавится одно пунктирное ребро. Теперь число ребер в оставшейся части D_2 не больше k , и ее, согласно индукционному предположению, можно сделать сплошным. После этого P_1 становится концевым ребром и делается сплошным одной операцией. \square

16.2.

а) сеть перекачивания многогранника можно построить с помощью элементарных движений его связной развертки;

б) узлы сети перекачивания многогранника можно получить из вершин связной развертки, поворачивая их друг относительно друга на углы, равные кривизнам этих вершин.

Выделим в сети перекачивания какую-нибудь связную развертку многогранника. Пусть Γ_1^1 – какая-то ее грань (ячейка), и пусть Γ_n^1 – произвольная ячейка СПМ. Если она принадлежит этой связной развертке, ее след уже построен, если нет, то существует плоский путь $\Gamma_1^1 \Gamma_2^1 \dots \Gamma_n^1$. Лемма 16.1. позволяет перестроить развертку с помощью ЭДР так, чтобы получить след Γ_2^1 . Далее процесс повторяется до тех пор, пока мы не получим Γ_n^1 . Это означает также и то, что все узлы сети можно получить из вершин связной развертки с помощью указанных поворотов. \square

Задача (трудная).

Докажите, что одну связную развертку многогранника можно перевести в любую другую последовательными элементарными движениями.

§17,

в котором вводятся инварианты, позволяющие провести сегрегацию вершин многогранника и их следов на плоскости перекачивания

Теперь мы можем доказать то, что было обещано ранее.

17.1. Если многогранник принадлежит классу M_3^d или M_4^d , все его вершины не могут иметь одну решетку.

Всю решетку сети перекачивания можно получить из определенного числа ее узлов (вершин связной развертки), поворачивая их друг относительно друга на определенные углы. В частности, если **A** и **B** - два эквивалентных узла решетки, то существует такая последовательность допустимых поворотов точки **A** относительно узлов решетки, в результате которой точка **A** перейдет в точку **B**.

Предположим, что многогранник принадлежит классу M_4^d и что все его вершины имеют одну решетку. Эта решетка является квадратной. Выделим какие-нибудь две ближайшие ее вершины и введем базис, в котором они имеют координаты **A(0,0)** и **B(0,1)**. Остается убедиться в том, что точку **A** нельзя перевести в точку **B** никакой последовательностью поворотов относительно точек той же решетки. Причина, по которой этого нельзя сделать, заключается в том, что у точки **A** - четная сумма координат, а у соседней с ней точки **B** - нечетная, между тем как мы сейчас покажем, что любой поворот точки решетки с четной суммой координат относительно любой другой точки решетки на угол, кратный прямому углу, переводит ее в точку с четной суммой координат. Иными словами, точки квадратной решетки делятся на два класса эквивалентности относительно поворотов на углы, кратные прямому углу: точки с четной суммой координат, и точки с нечетной суммой координат.

Действительно, пусть **D(x,y)** - произвольная точка решетки, **P(a,b)** - центр поворота на прямой угол в положительном направлении, а **D₁ = R_P^{π/2}** - образ точки **D** при этом повороте (рис.17.1)

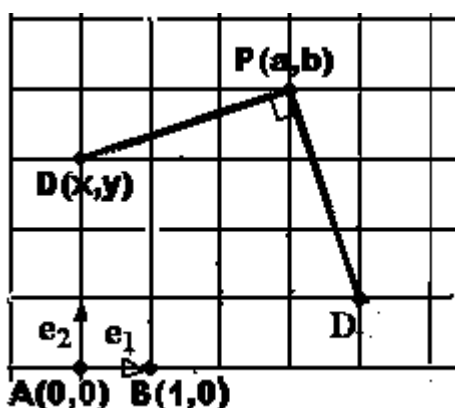


Рис.17.1

Введем соответствующие принятой системе координат единичные ортогональные вектора e_1 и e_2 , направленные по осям абсцисс и ординат. Тогда $AP = xe_1 + ye_2$, $PD = (x-a, y-b) = (x-a)e_1 + (y-b)e_2$, $AD_1 = AP + PD_1 = AP + R_P^{\pi/2}(PD) = (xe_1 + ye_2) + R_P^{\pi/2}((x-a)e_1 + (y-b)e_2) = (xe_1 + ye_2) + (x-a)R_P^{\pi/2}(e_1) + (y-b)R_P^{\pi/2}(e_2)$, откуда, учитывая, что поворот на прямой угол переводит e_1 в e_2 , а e_2 в $(-e_1)$, т.е. $R_P^{\pi/2}(e_1) = e_2$, $R_P^{\pi/2}(e_2) = -e_1$, имеем $AD_1 = (a+b-y)e_1 + (b-a+x)e_2$, откуда $D_1 = (a+b-y, b-a+x)$. Вычтя из суммы координат точки D_1 сумму координат точки D , получим $2(a-x)$, то есть четное число. Значит, все образы точки A при поворотах относительно точек решетки на углы, кратные прямому, будут иметь четную сумму координат. Поскольку точка B имеет нечетную сумму координат, ее нельзя получить из A никакой последовательностью поворотов, что и требовалось.

Аналогично доказывается невозможность одноцветной решетки для многогранника из M_3^d . Введем косоугольную координатную систему, построенную на векторах $e_1 = (1,0)$ и $e_2 = (0,1)$ соединяющих ближайшие точки решетки и образующих угол $2\pi/3$ (рис.17.2).

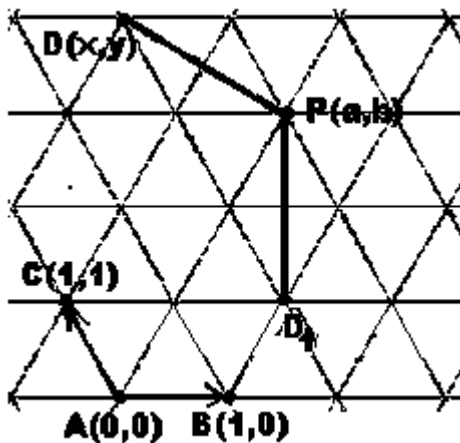


Рис.17.2

Запишем то же векторное соотношение $AD_1 = AP + PD_1 = AP + R^{2\pi/3}(PD) = (ae_1 + be_2) + R^{2\pi/3}((x-a)e_1 + (y-b)e_2) = ae_1 + be_2 + (x-a)R^{2\pi/3}(e_1) + (y-b)R^{2\pi/3}(e_2)$, и учтем, что $R^{2\pi/3}(e_1) = e_2$, $R^{2\pi/3}(e_2) = -(e_1 + e_2)$. Подставив правые части этих уравнений вместо левых в выражение для AD_1 , получим $AD_1 = (a+b-y)e_1 + (2b-a+x-y)e_2$, т.е. $D_1 = (a+b-y, 2b-a+x-y)$.

Поставим точке решетки $Z(u,v)$ в соответствие величину $F(Z)=(2u-v)$. Тогда $F(D) = (2x-y)$, $F(D_1) = (3a-y-x)$, $F(D_1) - F(D) = 3(a-x)$, то есть делится на 3. А поскольку $F(A)-F(B)=1$, эти точки не могут быть переведены одна в другую посредством допустимых поворотов.

Соотношение $F(D_1) - F(D) = 0 \pmod{3}$ также означает, все точки правильной треугольной решетки распадаются на три класса в зависимости от того, какой остаток от деления на 3 имеет разность между удвоенной абсциссой и ординатой точки, и точки разных классов не могут быть переведены друг в друга посредством допустимых поворотов относительно точек решетки. \square

§18,

в котором можно познакомиться с мнимыми числами и геометрическим смыслом действий с ними

Чтобы иметь дело с поворотами, точки и вектора целесообразнее записывать не в координатной, а в *комплексной* форме.

Определение 18.1. *Комплексным числом называется выражение $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, i – так называемая мнимая единица, для которой выполняется равенство $i^2 = -1$.*

С учетом этого равенства комплексные числа складывают и умножают как двучлены: $(2+3i)+(4-5i) = 6-2i$, $(2+3i)(4-5i) = 8-10i+12i-15i^2 = -7+2i$. Деление комплексных осуществляется так: $(a+bi)/(c+di) = (a+bi)(c-di)/(c+di)(c-di) = (a+bi)(c-di)/(a^2+b^2) = (ac+bd)/(a^2+b^2) + (bc-ad)i/(a^2+b^2)$.

Модулем комплексного числа z называется величина: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Докажите, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Если поставить в соответствие комплексному числу $a + bi$ вектор с координатами (a, b) , то сумме комплексных чисел соответствует сумма их векторов, умножению комплексного числа на действительное число – умножение его вектора на это действительное число. Поскольку вектору с координатами (a, b) соответствует точка с теми же координатами, между векторами, точками плоскости и комплексными числами существует взаимно-однозначное соответствие. Одни геометрические задачи удобно решать в чисто геометрической форме, другие – в координатной, третьи – в векторной, четвертые – в комплексной.

Комплексные числа можно представить в *тригонометрическом* виде. Если $z = a + bi$, и вектор z образует с осью OX угол α , то $z = |z|e_{\alpha}$, где e_{α} – единичный вектор, сонаправленный вектору z : $e_{\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. В частности, $e_0 = 1$, $e_{\pi/2} = i$, $e_{\pi} = -1$, $e_{3\pi/2} = -i$. Целесообразность введения вектора e_{α} состоит в формуле $e_{\alpha}e_{\beta} = e_{\alpha+\beta}$. В самом деле, $e_{\alpha}e_{\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) =$

$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) = e_{\alpha+\beta}$. Отсюда, в частности, следует, что умножение числа z на e_β приводит к повороту его вектора на β : $ze_\beta = |z|e_\alpha e_\beta = |z|e_{\alpha+\beta}$. В частности, умножение вектора z на i означает его поворот на $\pi/2$. Поскольку, далее, $e_\alpha e_{-\alpha} = e_0 = 1$, $e_{-\alpha} = (e_\alpha)^{-1}$. Отсюда следует, что комплексные числа образуют группу по умножению - их можно обращать и делить: если $z = |z|e_\alpha$, то $z^{-1} = |z|^{-1}e_{-\alpha}$, $z_1/z_2 = z_1 z_2^{-1}$.

Выведем полезные соотношения, позволяющие вычислять образы точек при поворотах относительно данных центров и центры композиций поворотов.

18.2. Пусть точкам X, A, Y соответствуют комплексные числа $x, a, y \in \mathbb{R}^2$, и $Y = R_A^\alpha(X)$. Тогда $y = a + (x - a)e_\alpha$.

В самом деле (рис.31), $y = OY = OA + AY = OA + R_A^\alpha(AX) = a + R_A^\alpha(x-a) = a + (x-a)e_\alpha$.

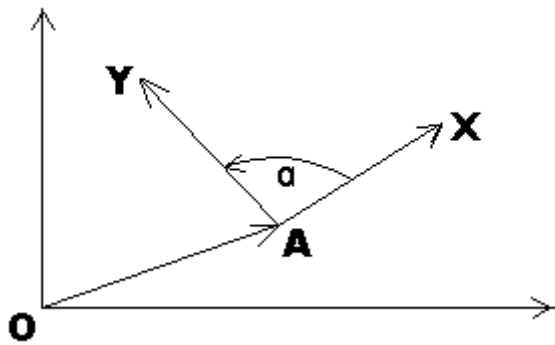


Рис.18.1

18.3. Если $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $R_B^\beta * R_A^\alpha = R_C^\gamma$, то $\gamma = \alpha + \beta$, $c = (b + (a - b)e_\alpha - a e_{\alpha+\beta}) / (1 - e_{\alpha+\beta})$. Если $\alpha + \beta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то переносу $R_B^\beta * R_A^\alpha$ соответствует комплексное число $b - c + (a - b)e_\beta + (c - a)e_{\alpha+\beta}$

Если $\alpha + \beta \neq 2\pi k$, точка C находится из уравнения $C = R_C^\gamma(C) = R_B^\beta R_A^\alpha(C)$, поскольку она является центром суммарного поворота и неподвижна относительно него. Дважды применяя 18.2, имеем $R_C^\gamma(C) = R_B^\beta R_A^\alpha(C) = R_B^\beta(a + (c - a)e_\alpha) = b + (a - b + (c - a)e_\alpha)e_\beta = c$, откуда и выражается c .

Если $\alpha + \beta = 2\pi k$, композиция поворотов является параллельным переносом на вектор T , соединяющий, например, точку C с ее образом $C_1 = R_B^\beta R_A^\alpha(C)$: $T = CC_1 = R_B^\beta R_A^\alpha(C) - c = (b + (a - b + (c - a)e_\alpha)e_\beta) - c = b - c + (a - b)e_\beta + (c - a)e_{\alpha+\beta}$. □

Силлогизм:

Мнимые числа разумны (К-Ф.Гаусс)

Все разумное действительно (Г-Ф-В.Гегель)

Мнимые числа действительны (В.Э.Матизен)

§19,

в котором чертятся развертки многогранников в виде морских звезд, каракатиц, лягушек, голубей и самолетиков

Полученные до сих пор результаты позволяют определять, к какому типу относится СП данного многогранника, т.е. является она вполне непрерывной, полунепрерывной или дискретной, и, в случае, если сеть дискретна, позволяют разместить вершины связной развертки многогранника в точках квадратной или треугольной решетки. Но как построить многогранник с дискретной СП, принадлежащей к выбранному нами классу, или, что то же самое, как построить его развертку?

Изучим этот вопрос для $M \in M_4$. Если многогранник плоский, для его построения нужно нарисовать квадратную сеть с диагоналями. Любой выпуклый многоугольник, образованный ее прямыми, имеет дискретную СП, которая является подсетью исходной сети.

Если многогранник объемный, разумно начать с простейшего случая – с тетраэдра. Возьмем квадратную решетку, пометим на ней произвольным образом три точки – и одна грань будущего многогранника (ABC на рис.19.1) готова. Теперь нужно пристроить к ней еще три грани так, чтобы получилась развертка тетраэдра. Чтобы их пристроить, необходимо задать кривизны всех вершин тетраэдра. Мы знаем, что эти кривизны кратны $\pi/2$. Значит, они могут принимать только три значения: $\pi/2$, π и $3\pi/2$, но задавать их произвольно нельзя, поскольку в сумме они должны давать 4π . Тогда, если x – число вершин тетраэдра с кривизной $\pi/2$, y – число вершин с кривизной π , и z – число вершин с кривизной $3\pi/2$, имеем систему уравнений: $x+y+z = 4$, $(\pi/2)x + \pi y + (3\pi/2)z = 4\pi$, откуда $y = 4 - 2z$, $x = z$. При $z=0$ мы имеем 4 вершины с кривизной π , то есть многогранник класса M_2 , который нам не нужен. При $z=1$ имеем $x=1$, $y=2$. Если $z=2$, то $x=2$, а $y=0$. При $z=3$ решений нет. Выберем вторую возможность, и будем строить тетраэдр, одна вершина которого имеет кривизну $3\pi/2$, две – кривизну π и одна – кривизну $\pi/2$. Зададим кривизны в вершинах грани ABC: π, π и $3\pi/2$ соответственно. Этим произвол ограничивается, и три образа четвертой вершины D на развертке нужно построить.

Заметим (рис.19.1), что точка D^1 при последовательных поворотах R_B^π , $R_C^{\pi/2}$, R_A^π переходит в себя (и, значит, является центром поворота,

равного сумме этих поворотов, т.е. определяется единственным образом). Чтобы вычислить ее координаты, можно воспользоваться формулами предыдущего параграфа. Поместим начало координат в точку C , и пусть $B=(b_1, b_2)$, $C=(c_1, c_2)$, $D^1=(x, y)$. Тогда $D^2 = (2b_1-x, 2b_2-y)$; $D^3 = (y-2b_2, 2b_1-x)$; $D^1 = (2c_1+2b_2-y, 2c_2-2b_1+x)$. Приравняв два выражения для координат точки D^1 , получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Из нее имеем: $x=b_1+b_2+c_1-c_2$. $y=-b_1+b_2+c_1+c_2$. Отсюда следует, что если A и B – целочисленные точки, точки D^1, D^2, D^3 тоже будут целочисленными, и вся развертка попадет вершинами в точки решетки.

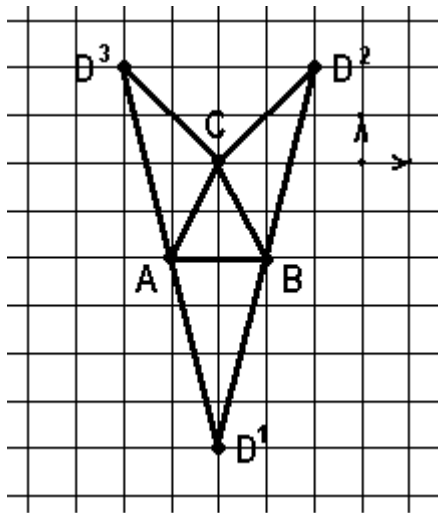


Рис 19.1

На рисунке $B=(2,-2)$; $C=(-1,-2)$, так что $x=1, y=-7$. Отметим, что точку D^1 можно было найти подбором, сообразив, что она находится на серединном перпендикуляре к стороне AB .

Задание. Выведите отсюда признак конгруэнтности пирамид: пирамиды, у которых соответственно равны основания и кривизны трехгранных углов, содержащих вершины оснований, конгруэнтны.

Если $M \in M_4$, у него не больше 8 вершин, среди которых могут быть $\pi/2$ -вершины, π -вершины и $3\pi/2$ -вершины. Если их количества обозначить x, y, z , а общее число вершин - V , то $3 \leq V \leq 8$, $x, y, z \geq 0$, $x + z \neq 0$. Для нахождения x, y, z имеем систему $x+y+z = V$, $(\pi/2)x + \pi y + (3\pi/2)z = 4\pi$, откуда $y = (8 - V) - 2z$, $x = (2V - 8) + z$. Подставляя сюда $V = 3, 4, 5, 6, 7, 8$; $z=0, 1, 2, \dots$, находим:

$$V = 3: (0, 1, 2).$$

$$V = 4: (1, 2, 1); (2, 0, 2).$$

$$V = 5: (2, 3, 0); (3, 1, 1).$$

$$V = 6: (4, 2, 0); (5, 1, 0).$$

$$V = 7: (6, 1, 0)$$

$$B = 8: (8,0,0)$$

При $B = 3$ набор кривизн определяет M с точностью до подобия: это равнобедренный прямоугольный треугольник. Решетка его СП трехцветна.

Вопрос. Что представляет собой плоский многогранник с набором кривизн $(1,2,1)$?

Упражнение. Докажите, что прямоугольная трапеция с острым углом $\pi/4$ является квадратно-решеточной при условии, что ее высота соизмерима с основаниями, а прямоугольный ромбоид с острым углом $\pi/4$ – если соизмеримы две его перпендикулярные смежные стороны.

Упражнение. На рис. 19.2 изображены развертки 3-угольной пирамиды $(1,2,1)$, 4-угольной пирамиды $(2,3,0)$ из M_4^d , а также 9-гранника $(6,1,0)$ того же класса. Постройте на этой же сетке развертки двух пирамид из M_4^d , взяв в качестве оснований нарисованные ниже 5-угольник и 6-угольник (места хватит).

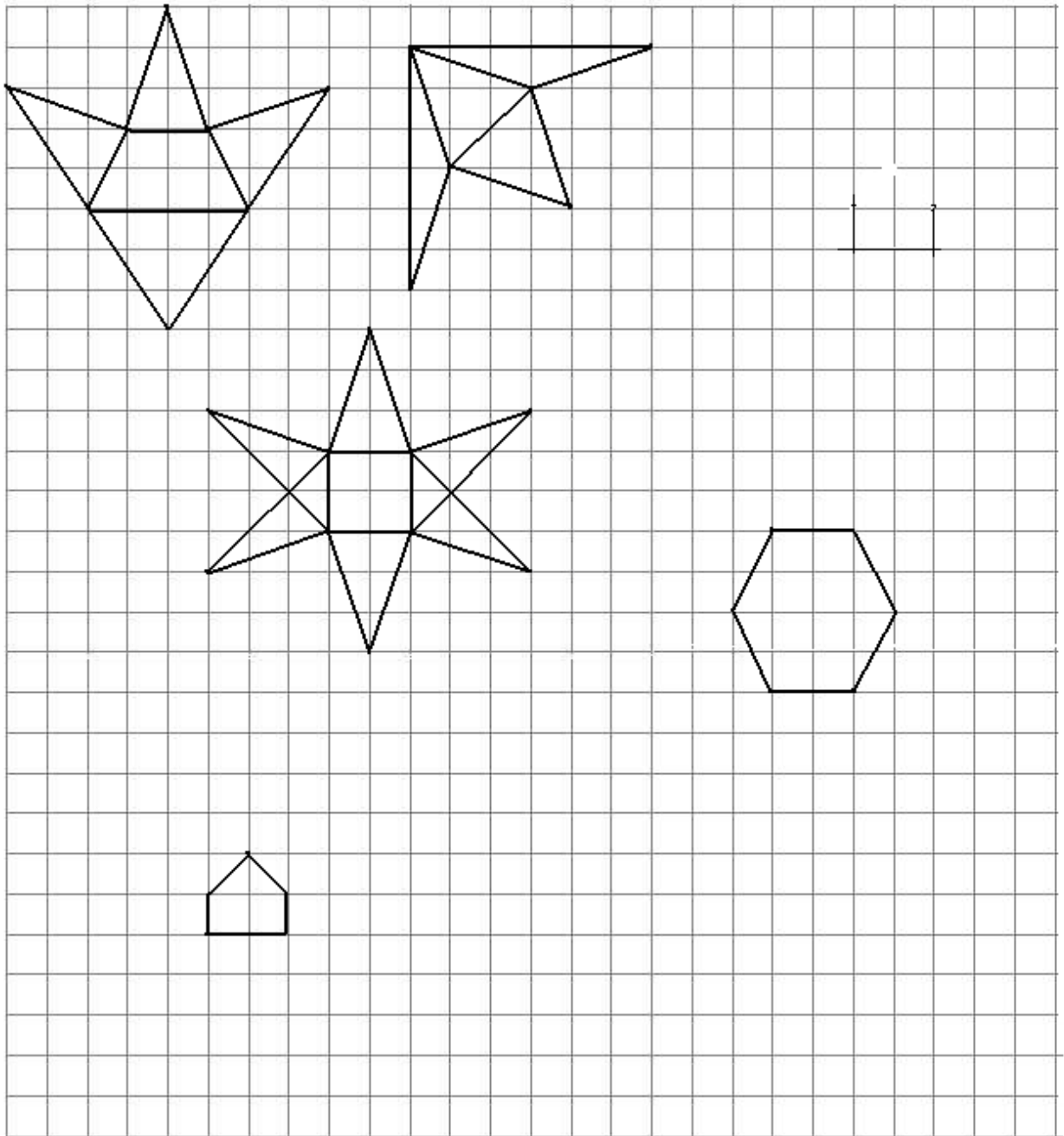


Рис.19.2

Полученные до сих пор результаты позволяют нам определять, к какому типу относится СП данного многогранника, т.е. является она вполне непрерывной, полунепрерывной или дискретной. Но как ее построить? Ясно, что сети первого и второго вида нельзя построить в геометрическом смысле, то есть начертить, поскольку каждая из этих сетей всюду плотно заполняет плоскость. Поэтому заданный вопрос имеет смысл только в том случае, если СПМ дискретна. Мы уже научились определять, имеет ли данный многогранник дискретную СП, и если имеет, то можем разместить его связную развертку в узлах некоторой правильной решетки **P**. Если это сделано, остается построить решетку СПМ, поскольку она не обязательно совпадает с решеткой **P**, а

может быть некоторой ее правильной подрешеткой. Будем исходить из того, что нам известны координаты вершин связной развертки многогранника в некоторой системе координат, квадратной для многогранника класса M_4 и правильно-треугольной для многогранников классов M_3 и M_6 . Для построения решетки надо вычислить координаты вектора кратчайшей трансляции его СП.

§20,

в котором показывается, что квадратные решетки строятся из целых комплексных чисел, а треугольные и ромбические – из треугольных.

С задачей построения решетки дискретной СПМ по данным вершинам его связной развертки тесно связана другая, которую мы и решим сначала: даны несколько точек с целыми координатами в некоторой квадратной или правильно-треугольной системе координат (базисе). Требуется построить квадратную или правильно-треугольную решетку с шагом максимальной длины, содержащую эти точки.

Будем называть *шагами* правильной решетки вектора, соединяющие ее ближайшие точки. У квадратной решетки четыре кратчайших шага одной длины в четырех направлениях, образующих между собой прямые углы, у треугольной – шесть, образующих между собой углы $\pi/3$. Очевидно, что если правильная решетка содержит точки A и B , она содержит правильную решетку с шагом AB . С учетом этого построение решетки с максимальным шагом, содержащей точки $A_0 \dots A_n$, осуществляется последовательно: сначала строится максимальная решетка, содержащая A_0 и A_1 , затем максимальная решетка, содержащая первую решетку и точку A_2 и т.д.

Опишем этот процесс для многогранника из M_4 , чья связная целогранная развертка уже размещена вершинами в узлах некоторой квадратной решетки. Без ограничения общности можно считать, что эта квадратная решетка имеет шаг 1 . Тогда ее точки, записанные в комплексной форме, имеют вид $m+ni$, где m, n – целые действительные числа. Такие числа называются *целыми комплексными числами* или *числами Гаусса*. Множество гауссовых чисел вместе с двумя своими элементами содержит их сумму, разность и произведение и обозначается Z^2 . Если z – гауссово число какой-то точки решетки, то ее максимальная подрешетка, содержащая точки 0 и z , задается всевозможными ЦЛК (с действительными коэффициентами) перпендикулярных векторов z и iz . Иными словами, ее узлы имеют координаты $mz+niz=(m+ni)z=uz$, где u – гауссово число. Будем обозначать такую решетку $\{uz\}$. Таким образом, мы доказали, что верно

20.1. Если z – комплексное число, то множество точек квадратной решетки, содержащей точку 0 и имеющей шаг z , совпадает с множеством $\{uz\}$, где $u \in \mathbb{Z}^2$.

Кратность, делимость, делитель и наибольший по модулю общий делитель гауссовых чисел определяются так же, как в действительном случае.

Для нахождения $\text{НОД}(z_1, z_2)$, где $|z_2| < |z_1|$, используется алгоритм деления с остатком. Пусть $|z_2| \leq |z_1|$. Построим квадратную решетку $\{uz_2\}$. Рассмотрим точку z_1 и ближайший к ней узел этой решетки. Соответствующее ему комплексное число обозначим u_1z_2 . Разность $z_1 - u_1z_2 = z_3$ называется остатком от деления z_1 на z_2 и является линейной комбинацией чисел z_1 и z_2 с гауссовыми коэффициентами или гауссовой линейной комбинацией (ГЛК). Поскольку расстояние от любой точки квадрата со стороной b до ближайшей его вершины не превосходит $b/\sqrt{2}$, то $|z_3| \leq |z_2|/\sqrt{2}$. Точно так же поделим z_2 на z_3 и т.д. Получим последовательность гауссовых чисел z_i , $i=1\dots$ с модулями, стремящимися к нулю, каждое из которых является ГЛК(z_1, z_2). Рано или поздно остаток станет по модулю меньше 1 , а поскольку единственное гауссово число с модулем, меньшим 1 – это 0 , то на некоем шаге n мы получим равенство $z_n = u_n z_{n+1}$, которое означает, что число z_n – гауссово кратное числа z_{n+1} . Но тогда в силу правила построения чисел $z_{n-1} \dots z_1$ все они тоже кратны z_{n+1} . Обозначим $z_{n+1} = d$ и покажем, что оно является искомым НОД. В самом деле, поскольку d является ГЛК(z_1, z_2), он представим в виде $uz_1 + vz_2$, а отсюда следует, что d делится на любое число d_1 , являющееся общим делителем z_1 и z_2 . Пусть, далее, d_1 и d_2 – два НОД(z_1, z_2). Тогда по определению НОД, $d_1 = m_1 d_2$, $d_2 = m_2 d_1$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_2$. Перемножая части этих соотношений и сокращая на $d_1 d_2$, имеем $m_1 m_2 = 1$, откуда $|m_1 m_2| = |m_1| |m_2| = 1$. Поскольку модуль не равного нулю гауссова числа не меньше 1 , то $|m_1| = |m_2| = 1$, откуда $m_{1,2} = \pm 1$ или $\pm i$, т.е. отношение двух НОД двух чисел есть одно из четырех гауссовых чисел с единичным модулем: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$.

20.2. Если $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2$ постоянные, а $u, v \in \mathbb{Z}^2$ – переменные, то $\{uz_1 + vz_2\} = \{wd\}$, где $d = \text{НОД}(z_1, z_2)$, $w \in \mathbb{Z}^2$.

Действительно, всякое число вида $uz_1 + vz_2$ делится на любой общий делитель z_1 и z_2 и потому является числом вида wd . А поскольку согласно доказанному выше $d = \text{ЦЛК}(z_1, z_2)$, то и наоборот, число вида wd является числом вида $uz_1 + vz_2$. \square

20.3. Если $z_1 \dots z_n$ – постоянные $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}^2$ – переменные,

$d = \text{НОД}(z_1 \dots z_n)$, то $\{u_1 z_1 + \dots + u_n z_n\} = \{wd\}$, где $w \in \mathbb{Z}^2$.

Доказательство проводится по индукции. Индукционная база установлена в 2.8.2. Индукционный переход: если $\{u_1 z_1 + \dots + u_n z_n\} = \{wd\}$, то

$$\{u_1 z_1 + \dots + u_n z_n + u_{n+1} z_{n+1}\} = \{wd + u_{n+1} z_{n+1}\} = \{mr\},$$

где $m \in \mathbb{Z}^2$, $r = \text{НОД}(\text{НОД}(z_1 \dots z_n), z_{n+1}) = \text{НОД}(z_1 \dots z_n, z_{n+1})$. \square

20.4. Любая квадратная решетка P , содержащая $0, z_1 \dots z_n$, содержит квадратную решетку $P_{\max} = \{wd\}$, где $w \in \mathbb{Z}^2$, $d = \text{НОД}(z_1, \dots, z_n)$.

В самом деле, пусть $0, z_1, \dots, z_n \in P$, d_1 – шаг P . Тогда $z_i = u_i d_1$, $u_i \in \mathbb{Z}^2$, $i=1 \dots n$. По свойству НОД, если d_1 делит все z_i , то d_1 делит d , и $\{wd\} \supset \{wd_1\}$. \square

Обратимся к $M_{3,6}$. Правильно-треугольной решетке соответствует косоугольная система координат, в которой все точки решетки имеют целые координаты. Вектор $(1,0)$, который в прямоугольной системе комплексных чисел является вектором e_0 , отождествляется с действительной единицей. Вектор $(1,0)$, который в прямоугольной системе является вектором $e_{\pi/3}$, обозначим e , и поставим точке решетки с координатами (m,n) в соответствие комплексное число $m+ne$. Такие числа называются *треугольными*. При $n=0$ треугольное число отождествляется с действительным. Треугольные числа можно складывать, вычитать, а также перемножать как двучлены, если положить $e^2 = e-1$ (это равенство означает, что $e_{\pi/3} e_{\pi/3} = e_{2\pi/3} = e_{\pi/3} - e_0$). Умножение вектора z на e в этой системе интерпретируется как поворот z на $\pi/3$. Модулем треугольного числа z называется длина соответствующего ему вектора. Ясно, что сумма, разность и произведение треугольных чисел будет треугольным числом, так что треугольные числа образуют кольцо.

20.6. Множество комплексных чисел P , соответствующих точкам правильно-треугольной решетки с шагом z и содержащей 0 , есть множество $\{uz\}$ чисел вида uz , где u – целое треугольное число.

В самом деле, множество точек содержащей 0 решетки с шагом z есть $\{mz + nze\} = \{(m + ne)z\} = \{uz\}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

В множестве треугольных чисел возможно деление с остатком. Алгебраически деление z_1 на z_2 , такое, что $|z_2| \leq |z_1|$, означает подбор такого треугольного u , что $z_1 = u z_2 + z_3$, где $|z_3| < |z_2|$. Геометрически z_3 – вектор расстояния между точкой z_1 и ближайшей к ней точкой

правильно-треугольной решетки с шагом \mathbf{z}_2 и содержащей $\mathbf{0}$. Поэтому $|\mathbf{z}_3| \leq |\mathbf{z}_2|/\sqrt{3}$.

Как и в случае квадратной решетки, алгоритм деления с остатком используется для нахождения НОД двух треугольных чисел. Если $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ – два НОД двух данных чисел, то $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1 \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ – одно из 6 треугольных чисел с модулем 1: $\mathbf{1}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^2 = \mathbf{e} - \mathbf{1}, \mathbf{e}^3 = -\mathbf{1}, \mathbf{e}^4 = -\mathbf{e}, \mathbf{e}^5 = \mathbf{1} - \mathbf{e}$.

20.7. Если $\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n$ – треугольные числа, $\mathbf{d} = \text{НОД}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$, то $\{\mathbf{u}_1 \mathbf{z}_1 + \dots + \mathbf{u}_n \mathbf{z}_n\} = \{\mathbf{w} \mathbf{d}\}$, где \mathbf{w} – треугольное число.

20.8. Любая правильно-треугольная решетка \mathbf{P} , содержащая $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, содержит правильно-треугольную решетку $\mathbf{P}_{\max} = \{\mathbf{w} \mathbf{d}\}$, где \mathbf{w} – произвольное целое треугольное число, $\mathbf{d} = \text{НОД}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$.

Теперь мы можем вернуться к решению исходной задачи построения решеток дискретных сетей перекачивания по координатам вершин их связной развертки. Сначала рассмотрим СПМ₄. Пусть 4-вершинам развертки многогранника соответствуют гауссовы комплексные числа $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, а 2-вершинам (если они есть) – комплексные числа $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Соответственно этому, в группу симметрий СП входят повороты на углы, кратные $\pi/2$ относительно 4-центров $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, и повороты на π (центральные симметрии) относительно 2-центров $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$. Как известно из предшествующего, с помощью композиций этих исходных поворотов из исходных вершин может быть получена вся решетка СПМ.

Пусть \mathbf{A} – 2-вершина связной развертки многогранника. Заметим, что в силу соотношения $\mathbf{R}_B^{-\pi/2} = \mathbf{R}_0^{\pi/2} * \mathbf{R}_A^{\pi}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{1} + \mathbf{i})$ поворот $\mathbf{R}_B^{-\pi/2}$ тоже является симметрией СПМ. Следовательно, любая симметрия СП, которая может быть представлена в виде композиции исходных поворотов относительно исходных точек, может быть представлена как композиция поворотов, соответствующих 4-центрам $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ и 4-центрам $\mathbf{u}_1(\mathbf{1} + \mathbf{i}), \dots, \mathbf{u}_k(\mathbf{1} + \mathbf{i})$. И наоборот, в силу соотношения $\mathbf{R}_A^{\pi} = \mathbf{R}_0^{-\pi/2} * \mathbf{R}_B^{-\pi/2}$, где $\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{1} + \mathbf{i})$, любая симметрия СП, которая может быть представлена в виде композиции поворотов, соответствующих 4-центрам $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ и 4-центрам $\mathbf{u}_1(\mathbf{1} + \mathbf{i}), \dots, \mathbf{u}_k(\mathbf{1} + \mathbf{i})$, может быть представлена в виде композиции исходных поворотов относительно исходных точек. Таким образом мы с самого начала можем избавиться от 2-вершин с координатами $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, заменив их 4-центрами с координатами $\mathbf{u}_1(\mathbf{1} + \mathbf{i}), \dots, \mathbf{u}_k(\mathbf{1} + \mathbf{i})$. Имея точки $\mathbf{0}, \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n, \mathbf{u}_1(\mathbf{1} + \mathbf{i}), \dots, \mathbf{u}_k(\mathbf{1} + \mathbf{i})$, мы можем построить содержащую их квадратную решетку максимального размера, которая и будет решеткой центров симметрии СПМ. Отсюда следует

20.10. (Итоговая теорема для M_4). Если 4-вершинам связной развертки $M \in M_4$, соответствуют гауссовы числа $0, z_1, \dots, z_n$, а 2-вершинам - гауссовы числа u_1, \dots, u_k , то решеткой центров симметрии СПМ будет решетка $\{wd\}$, где $d = \text{НОД}(z_1, \dots, z_n, u_1(1+i), \dots, u_k(1+i))$.

Детализируя этот процесс, можно показать, что в базисе с центром 0 и единичным вектором d 4-центрами первого типа будут точки, обе координаты которых четные, 4-центрами второго типа – точки, обе декартовы координаты которых нечетные, 2-центрами – точки, у которых ровно одна из координат нечетная (рис.20.1). Если ни одна 2-вершина не имеет в этом базисе декартовых координат названного типа, то 2-центры СП не являются узлами СПМ, и ее решеткой является 4^1-4^2 . Если нет ни одной 4-вершины с нечетными декартовыми координатами, то решеткой СП является 4-2. Если 4-вершины есть в обоих типах 4-центров, а среди 2-вершин хотя бы одна находится в 2-центре, решетка СП имеет вид 4^1-4^2-2 .

Если $M \in M_4^d$ - плоский, для построения решетки его СП удобно перейти в связанную с ним прямоугольную систему координат, начало которой помещается в одну из его вершин, а одна из осей пускается по исходящей из нее стороне.

Практическое разыскание НОД гауссовых чисел – занятие нехитрое, но значительно более трудоемкое, чем в случае целых действительных чисел. Пусть d – общий делитель гауссовых чисел u, v . Это значит, что существуют такие гауссовы числа x, y , что $u = xd, v = yd$. Поскольку квадраты модулей гауссовых чисел – натуральные числа, из соотношений $|u|^2 = |x|^2|d|^2$; $|v|^2 = |y|^2|d|^2$ следует, что квадрат модуля наибольшего общего делителя гауссовых чисел является наибольшим общим делителем квадратов модулей этих чисел. Его можно найти обычным путем, после чего остается перебрать гауссовы числа, квадрат модуля которых равен найденному числу и отыскать среди них те, которые нацело делят u и v .

Пусть, к примеру, требуется найти НОД $(3+i, -4+7i)$ (рис.20.1).

Имеем $|3+i| = 10, |-4+7i| = 65, \text{НОД}(10,65) = 5$. Пусть искомым НОД есть $d = a+bi$. Тогда $a^2 + b^2 = 5$. Целочисленные решения этого уравнения суть $(1,2)$ и все прочие пары чисел, полученные из этой перестановкой координат и переменной знаков. Из соответствующих им гауссовых чисел общим делителем исходных чисел будет $1+2i$ и каждое из трех чисел, полученных из него умножением на $i, -1, -i$, то есть то есть $2+i, -1-2i, -2+i$. Чтобы проверить, является какое-то из этих чисел, например, $1+2i$ делителем числа $3+i$, нужно поделить одно на другое: $3+i/1+2i = (3+i)(1-2i)/(1+2i)(1-2i) = (5-5i)/5=1-i$, т.е. получается гауссово число. Точно так же проверяется, что $1+2i$ делит $-4+7i$. Итак, множество НОД $(3+i, -4+7i)$ состоит из 4 чисел: $1+2i, 2+i, -1-2i, -2+i$.

Упражнение. Постройте на координатной плоскости минимальную квадратную решетку, содержащую числа $-2+3i$ и $3+9i$.

20.9. (Итоговая теорема для M_3). Если вершины связной развертки многогранника из M_3 находятся в точках, которым соответствуют треугольные числа $0, z_1, \dots, z_n$, то максимальной правильно-треугольной решеткой, содержащей решетку СПМ, является P_{max} . В системе координат с базисными векторами d и de , где $d = \text{НОД}(z_1, \dots, z_n)$, все вершины связной развертки многогранника являются целочисленными точками, каждая из которых служит центром симметрии СПМ одного из трех классов эквивалентности в зависимости от того, каков остаток от деления разности ее координат на 3. Решетка СПМ является треугольной трехцветной, если среди вершин развертки есть точки всех трех классов, и шестиугольной - если ее вершины принадлежат только двум классам. Если многогранник плоский, расстояние между ближайшими неэквивалентными узлами его СП равно НОД длин его сторон.

Чтобы получить итоговую теорему для M_6 , сперва построим решетку 6-центров СП. Если среди вершин связной развертки многогранника, расположенной в узлах некоторой правильно-треугольной решетки, есть хоть одна 6-вершина, она является 6-центром. Если такой вершины нет, обязательно есть 2-вершина и 3-вершина (иначе $M \notin M_6$). Пусть им соответствуют точки A, B и целые треугольные числа a, b . Тогда по теореме о композиции поворотов $R_A^{2\pi/3} * R_B^\pi = R_C^{-\pi/3}$, где C является 6-центром, $c = a + 2(b - a)e$. Перейдем в систему координат с началом в 6-центре, и заменим следы всех 2- и 3-вершин на 6-центры по формулам $R_0^{2\pi/3} * R_F^\pi = R_{F'}^{-\pi/3}$, где $f' = 2fe_{\pi/3}$, $R_0^{\pi/3} * R_G^{-2\pi/3} = R_{G'}^{-\pi/3}$, где $g' = g(1 + e_{\pi/3})$. Теперь шаг максимальной решетки, содержащей 6-центры, равен НОД соответствующих треугольных чисел.

20.10. (Итоговая теорема для M_6). В правильно-треугольной системе координат с базисным векторам $d/6$, где d - шаг решетки 6-центров СП, 6-центры будут иметь обе координаты, делящиеся на 6; 2-центры - координаты, дающие при делении на 6 остаток 3, 3-центры - координаты, дающие при делении на 6 остаток 2. Решетка вершины M_6 определяется тем, в каком центре она оказывается. Различных точечных решеток СПМ₆ ровно пять: решетка 6 (из 6-центров), решетка 6-3 (с пустыми 2-центрами), решетка 6-2 (с пустыми 3-центрами), решетка 3-2 (с пустыми 6-центрами) и полная решетка 6-3-2. (См. рис.14.1 цветной вкладки)

§21,

в котором опять потребуются навыки следопытов - чтобы перечислить правильные сети перекатывания класса M_3 и найти фигуры, которые их оставляют

СП многогранника по определению является объединением СП его ребер, а СП каждого ребра является множеством образов любого его следа при всевозможных симметриях СПМ. Исходя из этого, легко выяснить, что представляют собой сети отдельных ребер многогранника с дискретной сетью перекатывания.

Как было установлено ранее, $СПМ_3^d$ имеет либо сине-красную правильно-шестиугольную решетку **СК**, либо трехцветную правильно-треугольную решетку **СЗК**. Следы ребер многогранника соединяют узлы этих решеток.

Посмотрим, что представляет собой сеть одного ребра. Возможны следующие варианты:

- 1). След ребра имеет вершины в ближайших разноцветных узлах решетки. Тогда множество его образов при всевозможных поворотах относительно центров симметрии решетки является сетью с правильными 6-угольными ячейками, имеющей самопересечения в центрах симметрии. Таких сетей всего три, и они конгруэнтны: зеленая сеть **СК**, синяя сеть **КЗ** и красная сеть **СЗ** (рис. 3.3).
- 2). След ребра соединяет разноцветные узлы решетки и при этом не содержит ближайших разноцветных узлов. Убедитесь в том, что ему соответствует сеть, являющаяся объединением нескольких параллельных сетей с правильными 6-угольными ячейками, имеющая самопересечения не только в центрах симметрии решетки.
- 3). След ребра является отрезком, соединяющим ближайшие одноцветные узлы решетки: синие, красные или зеленые. В этом случае СП ребра является треугольной сетью с правильными ячейками, имеющей самопересечения в узлах того же цвета. Таких сетей тоже три: **КК** (рис. 3.5), **ЗЗ** и **СС**.
- 4). След ребра соединяет одноцветные узлы решетки, но не содержит ближайших одноцветных узлов. СП такого является объединением параллельных сетей с правильными треугольными ячейками. Это объединение тоже имеет самопересечения в точках, которые не являются центрами симметрии СПМ.

Таким образом, $СПМ_3^d$ может содержать сети разных размеров, самопересекающиеся и пересекающиеся между собой вне центров симметрии СПМ. Иначе говоря, дискретная СП не всегда правильна.

Определение. *Сеть называется **правильной**, если она имеет самопересечения только в центрах симметрии решетки (не обязательно заполненных следами вершин). Правильные сети **СК**, **КЗ** и **СЗ** назовем фундаментальными сетями 1 типа (**Ф1**), а сети **КК**, **СС** и **ЗЗ** - фундаментальными сетями 2 типа (**Ф2**).*

Исходя из этого определения с учетом сказанного выше получаем:

21.1. *Если $СПМ_3^d$ правильна, она является объединением фундаментальных сетей.*

Обратное неверно – сейчас мы убедимся, что не любое объединение фундаментальных сетей является правильной сетью и не любое является сетью перекачивания.

21.2. *Правильная $СПМ_3^d$ не может содержать сеть типа **Ф2**.*

Прежде всего, заметим, что правильная $СПМ_3^d$ не может иметь тип **Ф1**, так как эта сеть имеет одноцветную решетку, а все решетки рассматриваемого класса многогранников двуцветны или трехцветны. Правильная $СПМ_3^d$ также не может содержать более одной сети **Ф2**, так как любое объединение сетей этого типа (рис.3.6) имеет самопересечения вне центров симметрии решетки. Кроме того, правильная $СПМ_3^d$ по той же причине не может содержать такое объединение сетей **Ф1** и **Ф2**, в котором сеть **Ф2** имеет узлы другого цвета, нежели узлы сети **Ф1** (рис. 3.7).

Остается исключить две последние возможности и доказать, что правильная сеть **Ф1+Ф2**, где узлы **Ф2** имеют один из узловых цветов **Ф2** (рис. 3.8), а также правильная сеть **Ф1+Ф1+Ф2**, объединяющая две сети **Ф1** с сетью **Ф2** (рис.3.9), не являются сетями перекачивания. Действительно, плоский многогранник не может отпечатать ни сеть типа **Ф1+Ф2**, ни сеть типа **Ф1+Ф1+Ф2**, так как он имеет углы, кратные $\pi/3$, которые порождают СП, линии которой пересекаются под теми же углами, тогда как линии названных сетей образуют углы величины $\pi/6$. Что же касается объемных фигур, то любой объемный многогранный угол, перекачиваясь вокруг вершины, оставляет не менее 4 следов (почему?), а сети **Ф1+Ф2** и **Ф1+Ф1+Ф2** имеют узлы, из которых исходит всего 3 следа.

21.3. *Правильных $СПМ_3$ всего четыре:*

*а) 6-угольная сеть типа **Ф1** (рис.3.1). Ее отпечатывает единственная фигура – правильный двусторонний 6-угольник.*

b) ромбическая сеть, являющаяся объединением двух конгруэнтных сетей типа $\Phi 1$ (рис.3.2). Ее также отпечатывает единственная фигура – двусторонний ромб с углом $\pi/3$.

c) треугольная сеть, объединяющая три конгруэнтных сети типа $\Phi 1$ (рис 3.3). Ее отпечатывают, в частности, правильный двусторонний треугольник и правильный октаэдр, являющийся объединением двух конгруэнтных 4-угольных пирамид с правильными треугольными гранями и общим основанием.

d) объединение двух конгруэнтных сетей типа $\Phi 1$ и одной сети типа $\Phi 1$ вдвое большего размера (рис.3.4), в котором центры симметрии какого-то одного вида не заполнены следами вершин многогранника. Ее отпечатывает, например, двусторонняя трапеция, являющаяся объединением ромба, имеющего угол $\pi/3$, и правильного треугольника со стороной, равной стороне ромба.

21.4. Двусторонние многоугольники из M_3^d , то есть 3,4,5,6-угольники с соизмеримыми сторонами имеют правильные сети перекатывания.

В самом деле, стороны двустороннего многоугольника из M_3^d соизмеримы, а его плоские углы могут принимать всего два значения - $\pi/3$ и $2\pi/3$. Под этими же углами пересекаются линии его СП. Построим правильную треугольную сеть S с шагом, равным НОД сторон многоугольника, и разместим его вершины в ее вершинах, а ребра – на ее линиях. Решетка этой сети совпадает с решеткой центров симметрии СПМ, а сам многоугольник расположен на своей СП так, что все его стороны лежат на прямых, проходящих через ближайšie неэквивалентные центры. Тогда его СП является правильной подсетью сети S , не обязательно совпадающей со всей сетью.

Упражнение. Объясните, почему единственным объемным многогранником класса M_3 , который имеет правильную СП, является правильный октаэдр.

§21,

в котором перечисляются квадратные сети перекатывания класса M_4 и многогранники, которые их печатают

Пусть многогранник принадлежит классу M_4^d . Рассмотрим след какого-нибудь его ребра в СПМ. Он соединяет два ее центра симметрии. СП этого ребра является объединением всех его образов при всевозможных симметриях СПМ. Согласно результатам главы 2, эти симметрии являются либо параллельными переносами, либо поворотами на углы, кратные $\pi/2$ относительно узлов квадратной решетки, которую образуют центры симметрии СПМ. Убедитесь в том, что имеет место

21.1. *СП ребра многогранника из M_4^d является либо квадратной сетью, либо объединением квадратных сетей, и является правильной в том и только в том случае, если содержит ближайшие центры симметрии СПМ.*

Соответственно этому, существует 6 фундаментальных сетей (ФС), образованных ребрами, соединяющими те или иные ближайшие центры СПМ:

- 1) сеть типа **СК** с зелеными ребрами, соединяющими разные 4-центры, синие и красные,
- 2) две конгруэнтных сети **З⁰С** и **З⁰К** (рис.4.4 и 4.5) – одна с красными ребрами, проходящими через ближайшие синие 4-центры, другая с синими ребрами, проходящими через ближайшие красные 4-центры,
- 3) две конгруэнтные сети **СЗ** и **КЗ** (рис.4.2 и 4.3), соответственно с красными ребрами, содержащими ближайшие зеленый и синий центры, и с синими ребрами, содержащими ближайшие зеленый и красный центры.
- 4) сеть **ЗЗ**, ребра которой проходят через ближайшие зеленые центры (рис.5.6)

21.2. *Правильная СПМ₄ является либо фундаментальной сетью, либо объединением фундаментальных сетей.*

Действительно, СП любого многогранника является объединением СП его ребер. Чтобы она была правильной, необходимо, чтобы СП всех его ребер были правильными, а правильными СП ребер являются только фундаментальные сети. Объединение фундаментальных сетей, как показывает пример сети **ЗЗ+КС**, не всегда является правильной сетью, так как каждое серое ребро **ЗЗ**, соединяющее ближайшие зеленые центры, пересекается с одним из зеленых ребер **КС** не в центре симметрии решетки. Однако все объединения фундаментальных сетей, не содержащие сети типа **ЗЗ**, являются правильными сетями.

Лемма 21.3. *СП плоского многогранника из M_4^d не может содержать сеть **ЗЗ**.*

В самом деле, допустим, что его СП включает сеть **ЗЗ**, отпечатанную неким его ребром. Она содержит лишь зеленые центры. Исходящие из них под прямыми углами серые следы могут быть оставлены только смежными ребрами многоугольника, образующими прямые углы. Следовательно, это ребро соединяет вершины прямых углов многоугольника, откуда следует, что все его углы – прямые, и он

является прямоугольником. Но прямоугольник принадлежит классу M_2 и отпечатывает другую сеть.

Следствие. Все плоские многогранники класса M_4^d - многоугольники с числом вершин от 3 до 8, образованные линиями квадратной сети с диагоналями, имеют правильные СП.

Остается перечислить правильные $СПM_4$. Согласно предыдущему, каждая правильная сеть является либо ФС, либо объединением нескольких ФС. Рассмотрим их по порядку и отберем из них те, что являются сетями перекачивания, учитывая, что из каждого узла $СПM_4$ должно исходить не менее 4 ребер (почему?).

1). Единственной фундаментальной сетью $СПM_4$ является зеленая сеть **СК**. В самом деле, углы любой ФС – прямые, откуда следует, что отпечатать ее может только многогранник, все плоские углы которого – прямые. Но таких фигур всего две - прямоугольник и прямоугольный параллелепипед (почему?). Первый из них принадлежит классу M^2 и имеет 4-цветную сеть, а второй отпечатывает зеленую сеть **СК**.

2). Серо-зеленая сеть **СК+ЗЗ**, как было сказано выше, является неправильной сетью.

3). Сине-красные сети типа **ЗС+ЗК**, $З^0С+З^0К$, $ЗС^0+ЗК$, $ЗС+ЗК^0$ и $ЗС^0+ЗК^0$ (изображены на вкладке без узлов) не являются СП по тем же причинам, что указаны в пункте

4). Красно-серая сеть **ЗС+ЗЗ** рис.4.8, содержит сеть **ЗЗ** и, согласно ранее доказанному, не может быть СП плоского многогранника. Допустим, что она является СП объемного многогранника. Рассмотрим ту его 2-вершину, которая отпечатала решетку 2-узлов этой сети. Кривизна этой вершины равна π . Поскольку линии рассматриваемой сети пересекаются под углами, кратными $\pi/4$, все плоские углы при этой вершине тоже должны быть кратны $\pi/4$. Из таких углов можно сформировать объемный многогранный угол кривизны π единственным способом – сложив его из 4 плоских углов величины $\pi/4$. Но тогда из каждого следа этой вершины должны исходить 8 ребер, а не 6. Противоречие доказывает, что эта сеть тоже не является СП.

5). Красно-зеленая сеть типа **СК+З⁰С** рис.4.9 является сетью перекачивания многогранника G^7 , а из плоских фигур – сетью перекачивания, например, трапеции, составленной квадрата и примыкающего к нему равнобедренного прямоугольного треугольника.

6). Красно-сине-зеленая сеть типа $ЗК^0 + СК^0 + СЗ$ рис.4.10 с пустыми красными центрами (или такая же сеть $ЗС^0 + С^0К + СК$ с пустыми синими центрами). Докажем от противного, что $ЗК^0 + СК^0 + СЗ$ не является СП объемного многогранника. В самом деле, если предположить обратное, то ребра, исходящие из зеленых узлов этой

сети, отпечатал невырожденный многогранный угол с прямыми плоскими углами. Такой угол всего один – трехгранный с кривизной $\pi/2$, но его следы являются 4-центрами, а не 2-центрами. Противоречие. Из двугранников эту СП имеет, например, прямоугольная трапеция с полупрямым острым углом и отношением длин оснований 1:3 (выделена серым).

7). Красно-сине-зеленая сеть типа $3^0\mathbf{K}+3^0\mathbf{C}+\mathbf{СК}$ рис.4.11 с пустыми зелеными центрами. Эта сеть является СП для объемных многогранников $\mathbf{G}^2, \mathbf{G}^3, \mathbf{G}^4, \mathbf{G}^6$ (рис.22), а из двугранников – для равнобедренной трапеции с отношением оснований 1:2 и боковыми сторонами, которые в $2^{1/2}$ раза длиннее меньшего основания.

8). Красно-сине-зеленая сеть типа $3\mathbf{K}+\mathbf{СК}+\mathbf{СЗ}$ рис.4.12, у которой заполнены все центры. Докажем от противного, что эта сеть не может быть СП объемного многогранника. В самом деле, если она является таковой, то ее перпендикулярные ребра, исходящие из зеленых 2-узлов, отпечатаны многогранным углом кривизны π , так как вершины углов с кривизнами $\pi/2$ и $3\pi/2$ являются 4-центрами, причем этот угол кривизны – прямой. Но из плоских прямых углов нельзя составить объемный многогранный угол кривизны π . Из плоских же фигур эту сеть отпечатывает, например, равнобедренный прямоугольный треугольник.

9). Сине-красно-серая сеть $3\mathbf{K}+3\mathbf{C}+3\mathbf{З}$ рис.4.13. Эту сеть, как было доказано выше, может отпечатать только объемный многогранник. Такой многогранник существует - \mathbf{G}^1 на рис.5.

10). $3\mathbf{K}^0+3\mathbf{C}+3\mathbf{З}$ рис.4.14 и аналогичная сеть $3\mathbf{K}+3\mathbf{C}^0+3\mathbf{З}$. Эти сети не могут быть отпечатаны плоским многоугольником, так как каждая из них содержит ребро $3\mathbf{З}$, а среди перечисленных на рис. 5 объемных многогранников класса \mathbf{M}_4 с правильными СП нет такого, который бы ее отпечатывал.

Правильные сине-красно-серые сети с пустыми зелеными центрами не являются сетями перекатывания, так как

Итого, существует всего **6** правильных СПМ₄ (их обозначения на рис.4 оставлены неперечеркнутыми): $\mathbf{СК}, \mathbf{СК}+3^0\mathbf{C}, 3\mathbf{K}^0+\mathbf{СК}^0+3\mathbf{C}, 3^0\mathbf{K}+\mathbf{СК}+3^0\mathbf{C}, 3\mathbf{K}+\mathbf{СК}+\mathbf{СЗ}, 3\mathbf{K}+3\mathbf{C}+3\mathbf{З}$ и $3\mathbf{K}^0+3\mathbf{C}+3\mathbf{З}$.

21.5. Чтобы объемный многогранник класса \mathbf{M}_4 имел правильную СП, необходимо, чтобы его грани были равнобедренными прямоугольными треугольниками (возможно, разными) либо прямоугольниками с соизмеримыми сторонами.

В самом деле, правильная СПМ₄ является подсетью некоторой квадратной сети с диагоналями. Частью этой сети является и связанная развертка многогранника. Но диагонали и стороны квадратов сети

пересекаются под углами, кратными полупрямым. Следовательно, под такими же углами пересекаются и смежные ребра развертки многогранника, то есть его плоские углы кратны полупрямым углам и могут принимать значения $\pi/4$, $\pi/2$ и $3\pi/4$. При этом у объемного многогранника из M_4^d плоские углы не могут быть равны $3\pi/4$: ведь если один плоский угол при его вершине равен $3\pi/4$, то по теореме Эвклида на долю других плоских углов при той же вершине приходится больше $3\pi/4$. Тогда сумма всех плоских углов этой при вершине больше $3\pi/2$, а ее кривизна меньше $\pi/2$, что противоречит определению класса M_4 . Следовательно, грани многогранника могут иметь только прямые и полупрямые углы, то есть быть равнобедренными прямоугольными треугольниками, либо прямоугольниками.

Интуитивно ясно, что многогранников с полуквадратными и прямоугольными гранями не слишком много, однако единственный способ построения фигур с заданными типами граней, известный автору книги – перебор соединений многогранных углов с кривизнами π и $\pi/2$, но он настолько трудноописуем, что результат приходится формулировать без доказательства:

***Гипотеза.** Невырожденный многогранник класса M_4 с правильной сетью перекатывания является одной из фигур G_1 - G_7 (см. цв. вкладку):*

1. Пятивершинники.

Объединение двух тетраэдров с прямыми плоскими углами при противоположных вершинах (G^1). Набор кривизн в вершинах (2,3,0). Самое крупное разбиение поверхности - на 3 квадрата.

2. Шестивершинники.

А) Двойной 4-гранный купол с равными гранями (G^2). Набор кривизн (4,2,0). Самое крупное разбиение поверхности - на 4 квадрата. Б) 4-гранный бикупол с разными гранями (G^3). Набор кривизн (4,2,0). Самое крупное разбиение поверхности - на 5 квадратов.

3. Семивершинники.

Тиара - 5-гранный бикупол с разными гранями (G^4). Набор кривизн (5,1,0). Самое крупное разбиение поверхности - на 7 квадратов.

4. Восьмивершинники.

А) Прямоугольный параллелепипед с соизмеримыми сторонами (G^4). Набор кривизн (8,0,0). Самое крупное разбиение поверхности – на 6 квадратов (в случае куба).

Б). Правильная квадратная антипризма (G^6). Набор кривизн (8,0,0). Самое крупное разбиение поверхности – на 8 квадратов.

В). Объединение правильной треугольной призмы с соизмеримыми сторонами и двух правильных треугольных пирамид с прямыми углами

при вершинах, приставленных к ее основаниям (G^7). Самое крупное разбиение поверхности (в случае квадратных граней) - на 9 квадратов.

§23,

в котором перечисляются правильные сети перекачивания класса M_6 и приводятся фигуры, которые их печатают

Убедитесь в том, что для M_6^d верно то же, что было справедливо для M_3^d и M_4^d :

23.1. СП ребра многогранника класса M_6^d является правильной в том и том в том случае, если она содержит ближайшие центры симметрии СПМ.

23.2. СП плоского многогранника класса M_6^d не может содержать прямых $ЗЗ$, проходящих через ближайшие зеленые узлы СПМ.

Предположим обратное - что СП плоской фигуры класса M_6^d содержит прямую, проходящую через ближайшие зеленые узлы СПМ₆. Эта прямая содержит только зеленые центры, и поэтому образована следами ребра, соединяющего две вершины фигуры, имеющие кривизну π , то есть вершины прямых углов. Соседние с ними вершины лежат на прямых, перпендикулярных прямой $ЗЗ$ и проходящих через лежащие на ней зеленые центры. Все узлы, лежащие на этих прямых – зеленые. Все они являются следами вершин прямых углов и только их. Стало быть, наш многогранник является прямоугольником, а прямоугольник не принадлежит классу M_6 . Противоречие.

Следствие.

Любой выпуклый многоугольник, вершины которого находятся в центрах симметрии сети, разбивающей плоскость на конгруэнтные прямоугольные треугольники с углом $\pi/6$, а стороны лежат на линиях этой сети, имеет правильную СП, являющуюся подсетью данной сети.

Чтобы перечислить все правильные СП, введем, как и раньше, фундаментальные сети. В главе 2 мы установили, что СПМ₆ имеет три вида центров: синие 6-центры, красные 3 – центры и зеленые 2 – центры. Соответственно имеем 4 фундаментальные сети рис.6.1-6.4: красную сеть $СЗ$, содержащую синие и зеленые центры, синюю сеть $ЗК$, серую сеть $ЗЗ$, содержащую зеленые центры, и зеленую сеть $СК$, содержащую синие и красные центры.

1). Красная сеть $СЗ$ с синими и зелеными узлами. Она является СП, так как ее имеет, к примеру, правильный икосаэдр. Плоский многогранник с такой СП не существует, так как если бы он существовал, то имел бы те

же углы, которые образуют между собой ребра сети ($\pi/3$ и $2\pi/3$), но тогда он принадлежал бы к классу M_3 и имел другую СП.

2). Синяя сеть ZK . Не является СП объемного многогранника, так как из ее красных узлов исходят по три ребра, и не является СП многоугольника, так как единственный выпуклый многоугольник, образованный ее линиями – правильный 6-угольник, который принадлежит классу M_3 и обладает другой СП.

3). Серая сеть ZZ . Не является СП, так не существует ни такого плоского, ни такого многогранного угла с вершиной в зеленом узле, который мог бы отпечатать, который мог все или хотя бы часть ребер, исходящих из этого узла (почему?).

4). Зеленая сеть CK . Укажите причину, по которой она тоже не является СП.

Прочие правильные $СПM_6$ можно получить из четырех фундаментальных сетей, объединяя их по две, по три и по четыре. Проверьте, что все эти объединения являются правильными сетями, за исключением тех, которые одновременно содержат сеть $ZZ+CK$, имеющую самопересечения вне своих центров симметрии (проверьте!). Разберем оставшиеся варианты:

5). Красно-зеленая сеть Z^0C+CK рис.6.5. Является, к примеру, СП равнобедренного треугольника с тупым углом $2\pi/3$. **Не может быть СП объемного многогранника (почему?).**

6). Красно-синяя сеть Z^0C+Z^0K рис 6.6. Не является СП, так как ее 3-узлы не соединены ребрами с 6-узлами, то есть ни одна 6-вершина многогранника не соединена ребром с его 3-вершиной, а этого не может быть (почему?).

7). Красно-синяя сеть ZC^0+ZK рис 6.7. Поскольку из 3-центров исходят три ребра, может быть СП только двугранника и является таковой для выделенного на рис.23.6 пятиугольника – и, как несложно убедиться, только для него.

8). Красно-синяя сеть $ZC+ZK$ рис 6.8. Является СП только для фундаментального дельтоида (почему?).

9). Красно-серая сеть $ZC+ZK^0$ рис 6.9. Может быть СП только для объемных многогранников (почему?) и является таковой, например, для усеченной правильной треугольной пирамиды с отношением сторон оснований 2:3

10). Сине-зеленая сеть Z^0K+CK рис 6.10. Не может быть СП плоского многогранника (почему?). Является СП, например, для объединения двух правильных тетраэдров.

11). Сине-серая сеть $ZK+ZZ$ рис 6.11. Докажите, что она не является СП.

12), 13), 14). Красно-сине-серые сети $ZC+ZK+ZZ$, $ZC^0+ZK+ZZ$, $ZC+ZK^0+ZZ$ (все они имеют вид рис. 6.12). Объясните, почему ни одна из них не является СП.

15). Красно-сине-зеленая сеть $3C+3K+3K$ рис.6.15. Является СП, например, для фундаментального прямоугольного треугольника с острым углом $\pi/3$. Не может быть СП объемного многогранника, поскольку исходящие из зеленых узлов перпендикулярные ребра способен отпечатать только прямой угол кривизны π , который является плоским (почему?).

16). Красно-сине-зеленая сеть $3C^0+3K+C^0K$ рис.6.16. Является СП, в частности, прямоугольной трапеции с острым углом $\pi/3$ и отношением оснований $1:5$. Объясните, почему она не является СП объемного многогранника.

17). Красно-сине-зеленая сеть 3^0C+3^0K+3K рис.6.17. Является, в частности, СП равнобокой трапеции с отношением оснований $1:2$ и острыми углами при большем основании $\pi/6$ и $2\pi/3$, а из многогранников – СП объединения двух симметричных относительно общего основания пирамид $DAVC$ и D^1AVC , где ∇DVC – правильный, а ∇ADV , равный ∇ADC – прямоугольный с острым углом $\pi/3$.

18). Красно-сине-зеленая сеть $3C+3K^0+3K^0$ рис.6.18. Ее отпечатывает, например, прямоугольная трапеция с острым углом $\pi/6$, высота которой в $3^{1/2}$ раза длиннее меньшего основания, а большее основание в 4 раз длиннее меньшего. Объясните, почему ее не может отпечатать объемный многогранник.

19). Красно-сине-зеленая сеть $3^0C+3^0K^0+3K^0$ рис.6.19. Укажите многоугольник, для которого она является СП, и причину, по которой она не является СП объемного многогранника.

Итак, всего имеется 11 правильных $СПM_6$ (на рис.6 их обозначения не перечеркнуты).

Примечание. Если не различать цветов и не отличать узлы от пустых центров, то все правильные СП являются подсетями сети, разбивающей плоскость на равные прямоугольные треугольники с острым углом $\pi/6$.

23.5. Чтобы объемный многогранник класса M_6 имел правильную СП, необходимо, чтобы его грани были треугольно-решеточны и имели углы, кратные $\pi/6$. Или (что то же самое) чтобы его связную развертку можно было разместить на линиях правильной сети, разбивающей плоскость на прямоугольные треугольники с углами, кратными $\pi/6$.

Таких многогранников довольно много, и перечислить их автору не удалось.

ЭПИЛОГ,

в котором автор книги катает все что ни попадя и открывает жизненный принцип пластилина

За время разработки теории перекаtywания я приобрел привычку катать все, что можно и что нельзя – например, мокрый снег и тару с упомянутой в предисловии надписью: «Не кантовать!». Однажды мне на глаза попал бесформенный кусок пластилина. Я прикрыл его блюдцем, слегка прижал и стал круговыми движениями раскатывать по столу, чтобы придать ему округлую форму. Однако по завершении процедуры на столе оказался аккуратный двойной конус. Разинув рот от изумления, я скомкал его в бесформенную массу, сунул под блюдце, раскатал по другой окружности и снова извлек двойной конус, только более тупой. Тут я задумался и нашел объяснение, в котором столько же математики, сколько философии. Сначала сформулируем *принцип пластилина*: ***ЕСЛИ ТЕБЯ НАСИЛЬСТВЕННО КАТЯТ И СОПРОТИВЛЕНИЕ БЕСПОЛЕЗНО, ПРИМИ ФОРМУ, КОТОРАЯ ПОЗВОЛИЛА БЫ ТЕБЕ СВОБОДНО СОВЕРШАТЬ ТО ЖЕ ДВИЖЕНИЕ.*** Теперь посмотрим, каким должно быть это движение. Во-первых, заметим, что если блюдце совершает круговые движения на одной высоте параллельно столу, то стол совершает круговые движения того же радиуса относительно блюдца. Но раз плоскости, между которыми раскатывается пластилин, равноправны, итоговая форма должна состоять из двух симметричных половин. Во-вторых, катание по кругу означает катание вокруг центра круга. Согласно принципу пластилина, он должен принять такую форму, которая позволит ему катиться вокруг данной точки свободно, а этому условию удовлетворяет только коническая форма.

ЦВЕТНАЯ ВКЛАДКА

Рис.1 Слева - минимальная квадратная решетка, содержащая данные гауссовы числа $(-4+7i)$ и $(3+i)$, справа – полная квадратная решетка $СПМ_4$.

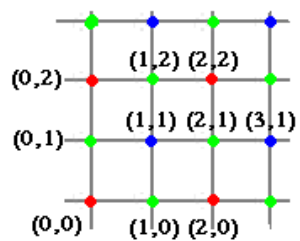
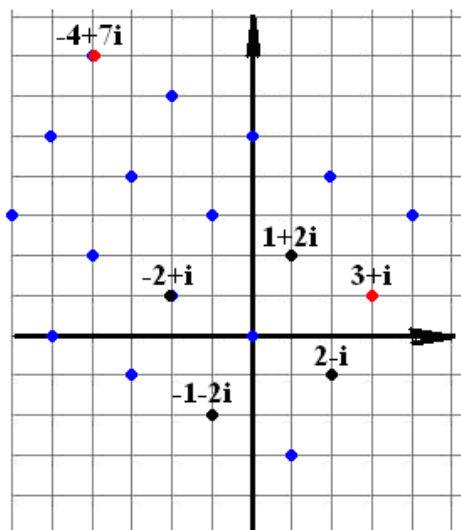
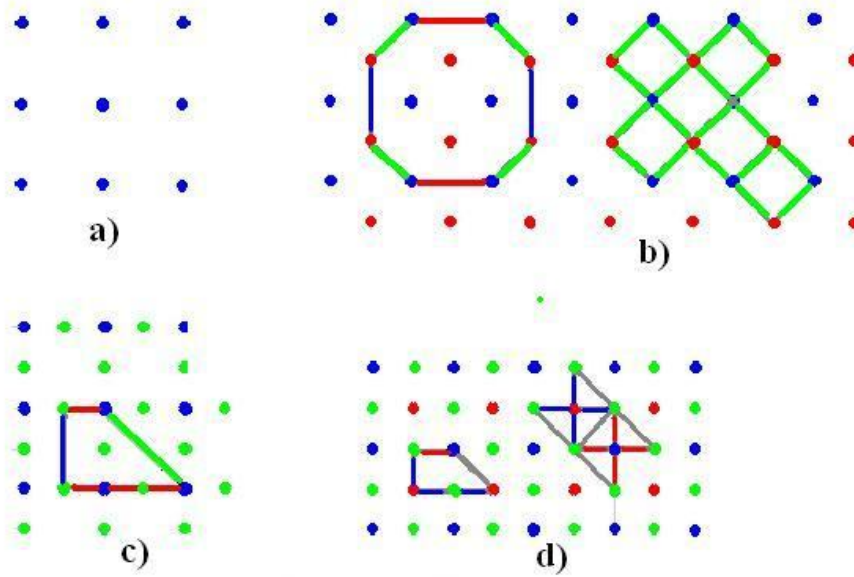
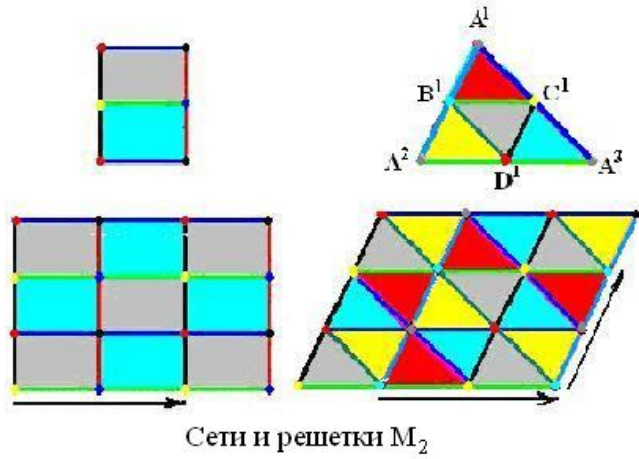


Рис.2 Дискретные решетки $СПМ_2$, $СПМ_3$, $СПМ_4$, и $СПМ_6$

Дискретные решетки
сетей перекачивания



Решетки M_4

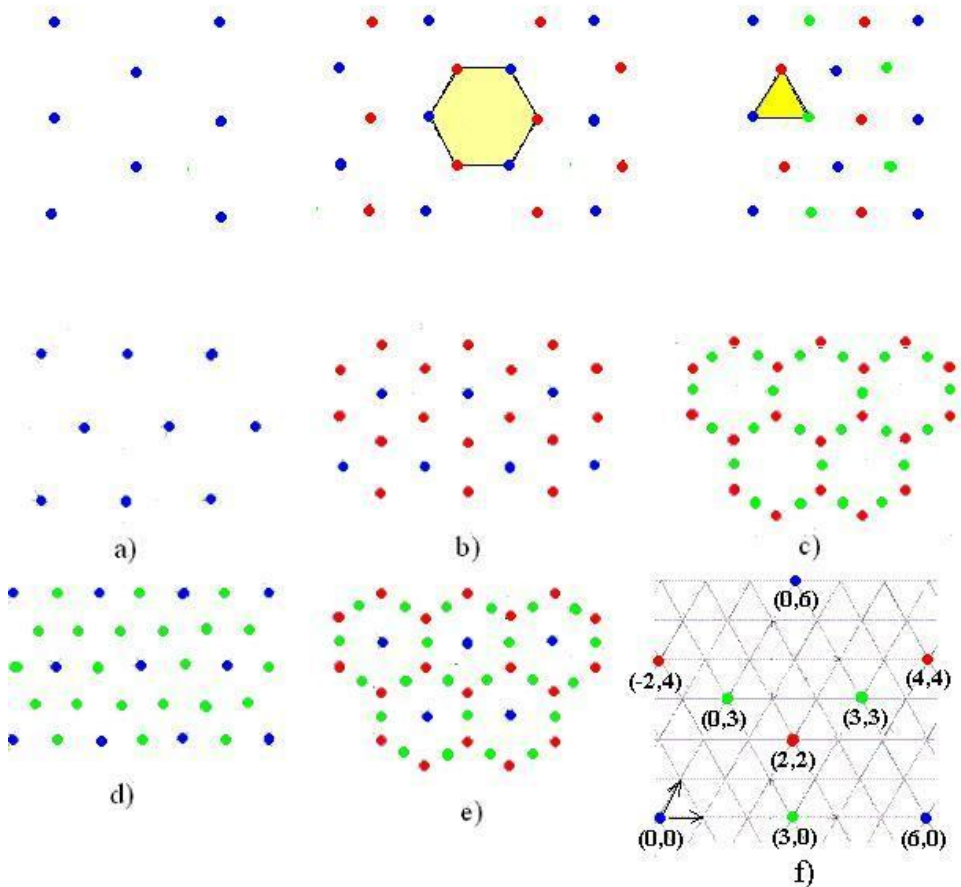


Рис.3 Сети M_3

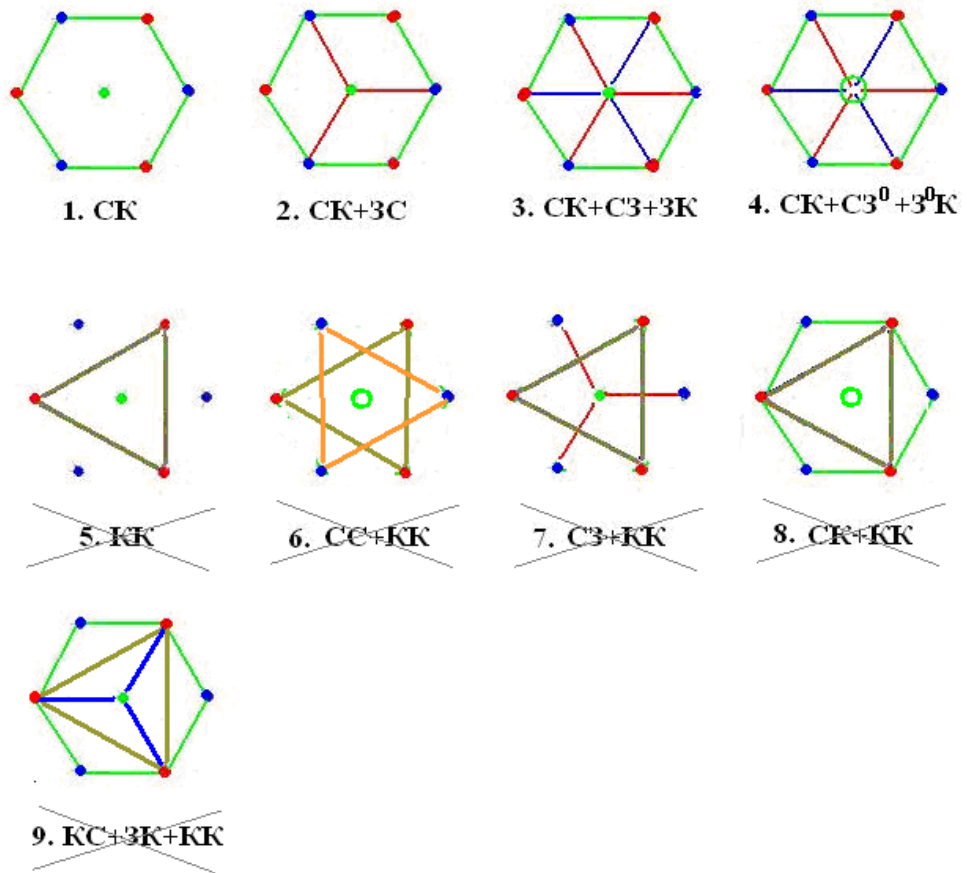


Рис.4 Сети M_4

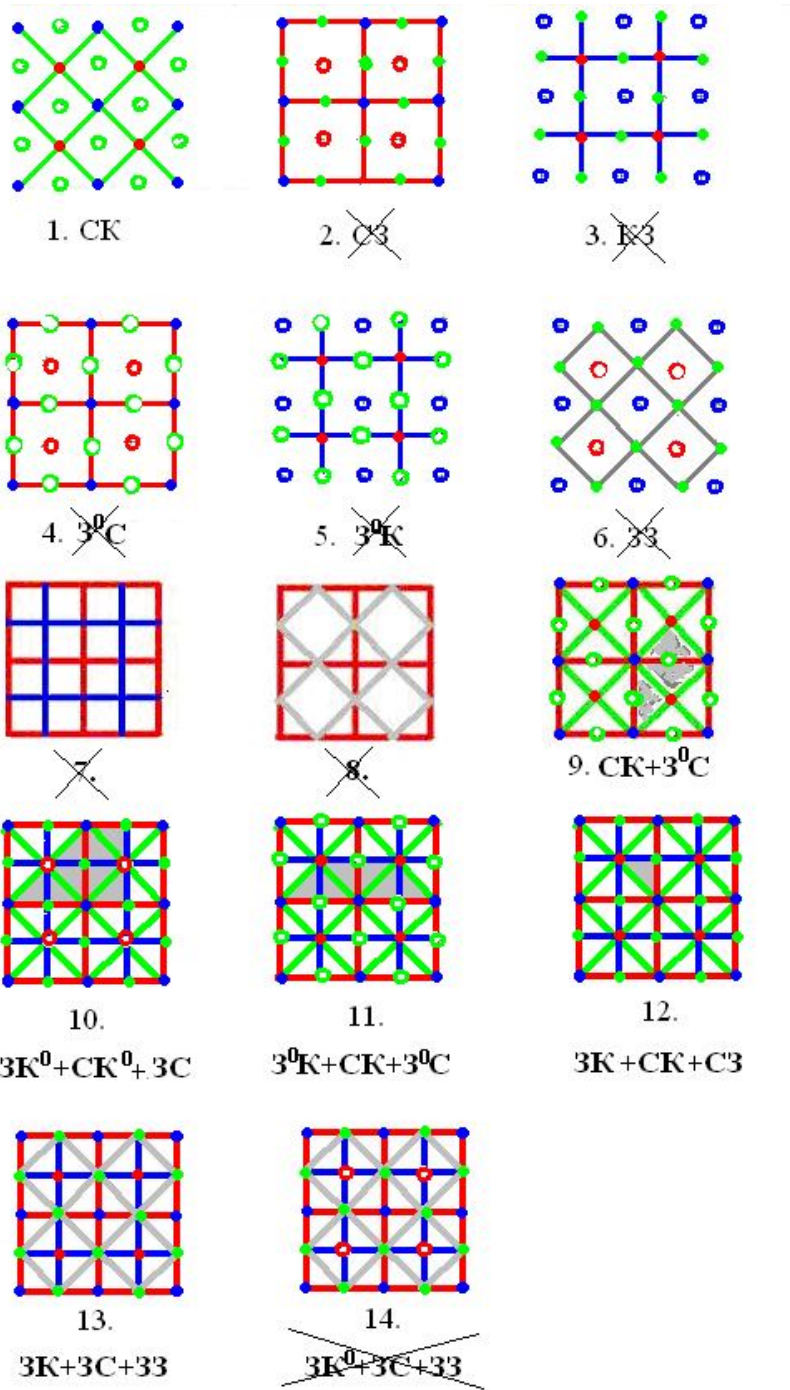


Рис.5 Объемные многогранники M_4 с правильными СП.

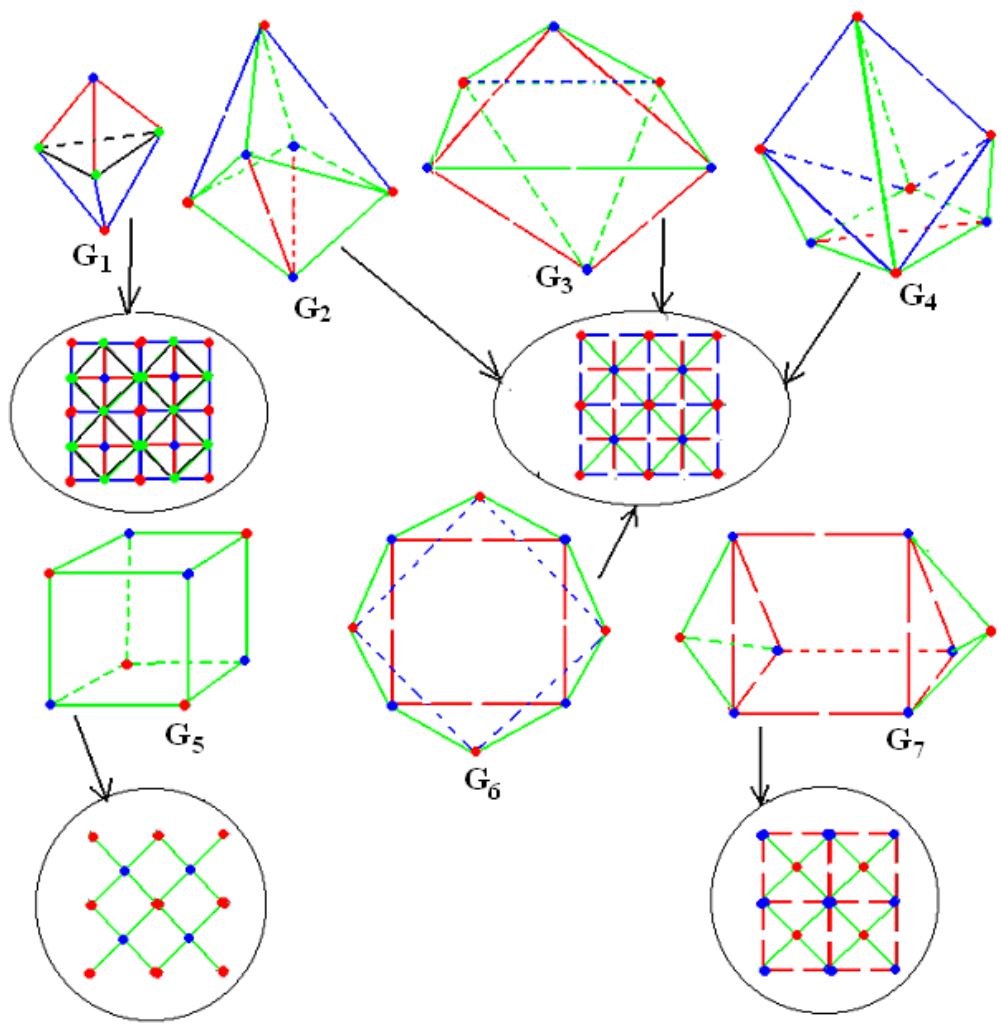
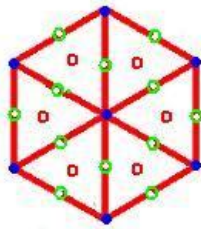
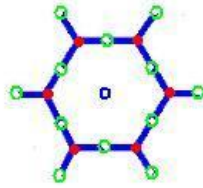


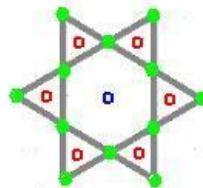
Рис.6 Сети M_6



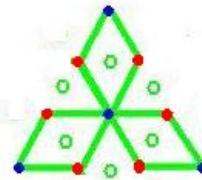
1. 3^0C



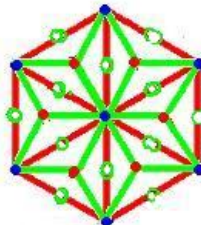
2. ~~3^0K~~



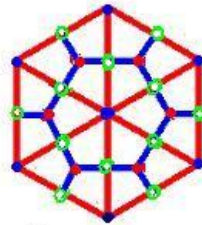
3. ~~3^3~~



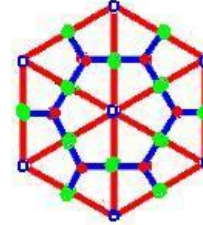
4. ~~CK~~



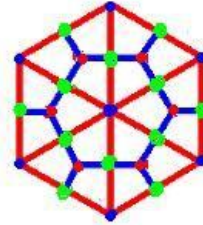
5. 3^0K+CK



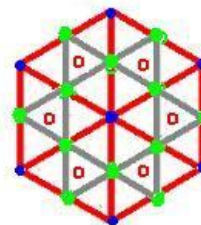
6. ~~3^0C+3^0K~~



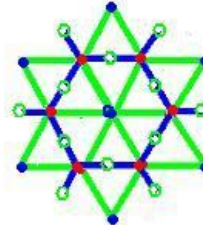
7. $3C^0+3K$



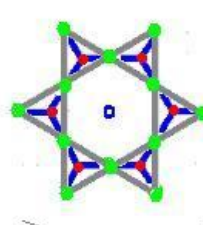
8. $3C+3K$



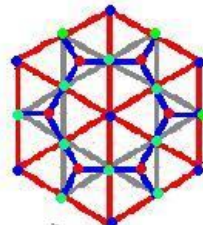
9. $3C+3^3$



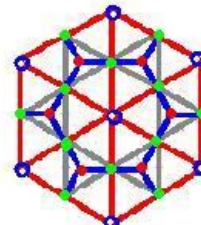
10. $CK+3^0K$



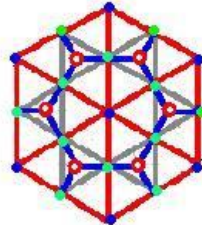
11. ~~$3K+3^3$~~



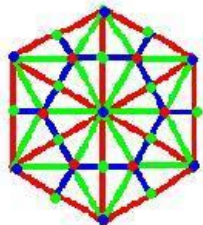
12. ~~$3C+3K+3^3$~~



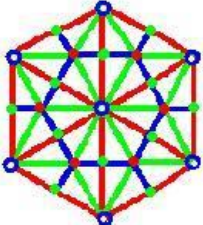
13. ~~$3C+3K+3^3$~~



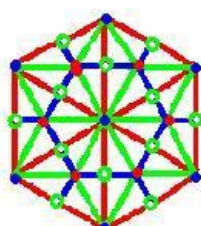
14. ~~$3C+3K^0+3^3$~~



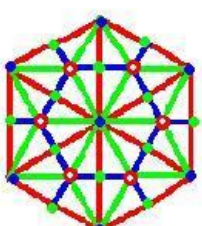
15. $3C+3K+CK$



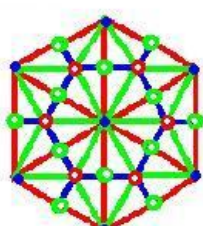
16. $3C^0+3K+CK$



17. 3^0C+3^0K+CK



18. $3C+3K^0+CK^0$



19. 3^0C+3^0K+CK