Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

8 классы

Составители: А. Л. Канунников

Москва, 2018

Математический кружок 8 классы. / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. А. Л. Канунников. — М.: МГУ, 2018.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы. В основу брошюры легли задачи, предлагавшиеся на Малом мехмате МГУ, а также на математических кружках при МПГУ.

Содержание

Предисловие

Эта брошюра призвана помочь организовать *математический кружок* для учащихся восьмых классов, однако собранные здесь задачи можно с успехом решать с семиклассниками, а также предлагать (в рамках «ликвидации безграмотности») старшеклассникам, которым не довелось в должное время поучаствовать в математических кружках.

Каждый раздел брошюры соответствует одному занятию кружка и состоит из двух частей — листка с задачами для выдачи ученикам и комментария для преподавателей. Для удобства оригинал-макеты листков также выделены в отдельный файл.

Занятие с использованием листочка обыкновенно проводится примерно **по следующей схеме:**

- *До занятия* руководитель кружка решает сам все задачи и читает предлагаемые решения с комментариями.

- *В начале занятия* каждый школьник получает листок с условиями задач и начинает *самостоятельно* их решать. На первом занятии школьникам нужно объявить: задачи можно решать в любом порядке; как только задача (по мнению школьника) решена, нужно поднять руку и приготовиться обсуждать решение с преподавателем *устно.* Кружок — это не письменная олимпиада. Как правило, **не нужно** в начале занятия «рассказывать теорию»: задачи подобраны так, чтобы решающий сам додумался до ключевых идей листочка. Иногда в начале занятия, до раздачи новых листков, разбираются решения некоторых задач предыдущего занятия.

- *Во время занятия* школьники решают задачи и время от времени пытаются их «сдать» преподавателям. Преподавателей на кружке может быть несколько, если учеников достаточно много. Желательно, чтобы на каждого преподавателя приходилось не более семи школьников. Решения задач обсуждаются *индивидуально* с каждым школьником.

- Если решение **верно,** школьника следует поздравить с решённой задачей и поставить «плюсик» в специальную таблицу (кондуит, или «плюсник»).
- Если решение **неверно,** школьнику предлагается продолжить размышления над задачей. Иногда можно давать небольшие подсказки.

Мы считаем, что **главная цель** математических кружков — приносить школьникам **радость** решения математических задач и через это развивать их смекалку и расширять кругозор. Поэтому мы **категорически не советуем** подменять эту главную цель целями побочными, в частности:

- считаем неприемлемым ставить оценки «за работу на кружках», проводить на кружке контрольные работы и вообще обязывать школьников посещать кружок;
- не советуем объяснять решения всех задач из брошюры (школьник получает больше радости и пользы от собственного, а не от чужого решения);
- не считаем правильным задаваться целью подготовки к определённому виду олимпиад или других соревнований. (В то же время школьники, посещающие математические кружки, в среднем лучше выступают на олимпиадах.)

Мы полагаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2–3 задачи и немного продвинется ещё в 1–2 задачах, то это уже хороший результат. Однако бывает, что задачи оказываются **слишком сложными** для школьников. В этом случае неправильно превращать занятие в разбор всех задач у доски. Вместо этого можно давать подсказки — как индивидуально, так и всем сразу. Представление о том, как подсказывать в конкретных задачах, можно извлечь из комментариев к листкам.

Если всё-таки наши листочки в целом оказались слишком сложными, мы советуем подбирать к каждому занятию аналогичные по тематике более простые задачи. Помните, что приводимая здесь подборка задач призвана *помочь* в организации кружка, но ни в коем случае не загнать его в жёсткие рамки. При выборе задач прежде всего руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших учеников:** задачи должны нравиться преподавателям, быть интересны и посильны ученикам.

Удачи!

Листок 1. Буквы помогают

$\boxed{\textbf{1}}$ Что больше: **а)** $\dfrac{20182017}{20172018}$ или $\dfrac{20182018}{20172019}$; **б)** $\dfrac{12345}{54321}$ или $\dfrac{12346}{54322}$?

$\boxed{\textbf{2}}$ Незнайка заметил, что

$$11 - 2 = 9 = 3^2,$$
$$1111 - 22 = 1089 = 33^2.$$

Он предположил, что число

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n}$$

будет полным квадратом при любом натуральном n. Помогите Незнайке это доказать.

$\boxed{\textbf{3}}$ Мальвина учила Буратино сокращать дроби и дала ему контрольное задание: сократить дроби $\dfrac{16}{64}$ и $\dfrac{19}{95}$. Увидев правильные ответы, Мальвина было порадовалась, но взглянув на решение, пришла в ужас:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$$

Придя в себя, Мальвина решила найти все такие цифры от 1 до 9, для которых выполняется равенство

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$$

($\overline{ab}$ и $\overline{bc}$ — двузначные числа), причём дробь $\dfrac{a}{c}$ может быть сократимой. Отыщите и вы все такие дроби.

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ В обоих пунктах положительные числитель и знаменатель увеличили на 1. Как при этом может измениться дробь? Вот простые примеры: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, но $\frac{2}{1} > \frac{3}{2}$. Вообще, две дроби можно сравнить, домножив на знаменатели, но давайте предварительно введём обозначения как для краткости, так и для решения задачи в общем виде. Обозначив через $\vee$ любой знак неравенства, сравним $\frac{a}{b}$ и $\frac{a+1}{b+1}$ для любых $a, b > 0$:

$$\frac{a}{b} \vee \frac{a+1}{b+1} \iff a(b+1) \vee b(a+1) \iff a \vee b.$$

Итак, ответ зависит от сравнения числителя и знаменателя.

Ответ: а) первое число; **б)** второе число.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Примеры, рассмотренные Незнайкой, наводят на мысль, полный квадрат какого числа должен получиться:

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n} = \underbrace{3\ldots3}_{n}{}^2.$$

Проверим для $n = 3$, но не проводя вычисления явно, а *обращаясь с числами как с буквами:*

$$111111 - 222 = 111(1001 - 2) = 111 \cdot 999 = 111^2 \cdot 9 = 333^2.$$

Аналогично для любого n: обозначив $a = \underbrace{1\ldots1}_{n}$, имеем

$$\underbrace{1\ldots1}_{2n} - \underbrace{2\ldots2}_{n} = a \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n-1}1 - 2a = a \cdot \underbrace{9\ldots9}_{n} = (3a)^2.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Условие записывается уравнением

$$(10a + b)c = (10b + c)a \iff 10ac + bc = 10ab + ac.$$

Теперь не стоит приводить подобные ($10ac$ и ac), а лучше вынести 10 за скобку, чтобы воспользоваться делимостью:

$$10a(b - c) = c(b - a). \tag{1}$$

Отсюда $c(b-a)$ кратно 10, а поскольку a, b, c — цифры, то это возможно только в следующих случаях.

Случай 1: $b-a=0$. Тогда из (1) получаем $a=b=c$ — это очевидные решения.

Случай 2: $c=5$. Тогда

$$(1) \iff 2a(b-5)=b-a \iff (2a-1)b=9a \Longrightarrow (2a-1)b \,\vdots\, 9.$$

1) $b=9$: $2a-1=a \iff a=1$, откуда $\boxed{\dfrac{19}{95}=\dfrac{1}{5}}$

2) $b=3$: $2a-1=3a \iff a=-1$ — не подходит.

3) $b=6$: $4a-2=3a \iff a=2$, откуда $\boxed{\dfrac{26}{65}=\dfrac{2}{5}}$

4) $2a-1 \,\vdots\, 9 \iff 2a-1=9 \iff a=5$: $b=5$ — это случай 1.

Случай 3: $b-a=\pm 5$. Тогда

$$(1) \iff 2a(a\pm 5-c)=2ac \iff 2a(a\pm 5)=(2a+1)c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0<a\pm 5 \,\vdots\, 2a+1 \Longrightarrow \pm=+,\ a\in\{1,4\},$$

откуда $\boxed{\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}}$ и $\boxed{\dfrac{49}{98}=\dfrac{4}{8}}$ (сократимая дробь).

Ответ: $\dfrac{16}{64}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{19}{95}=\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{26}{65}=\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{49}{98}=\dfrac{4}{8}$, $\dfrac{\overline{aa}}{\overline{aa}}=\dfrac{a}{a}$.

Листок 2. Связные графы

1 Соедините сто городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из каждого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

2 В тридевятом царстве от любого города до любого другого можно долететь без пересадок либо на ковре-самолёте, либо на метле. Докажите, что от любого города до любого другого можно долететь, пользуясь только одним из этих видов транспорта, хотя, возможно, и с пересадками в других городах.

3 Жители Лунного города могут добраться на метро от любой станции до любой другой. Однажды сотрудники метро устроили забастовку и потребовали от мэрии закрыть одну станцию. Докажите, что мэрия может выбрать эту станцию так, чтобы между любыми двумя другими по-прежнему было сообщение.

4 Воллейбольная сетка имеет размеры 50×600. Какое наибольшее число верёвочек в ней можно разрезать, чтобы сетка не распалась на куски?

5 Гидры состоят из голов и шей (каждая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча Геракл можно разрубить все шеи, выходящие из какой-то одной головы, однако при этом из неё мгновенно вырастает по одной шее во все остальные головы (не соединённые с ней ранее). Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить её на две несвязанные шеями части. При каком наименьшем N Геракл может победить любую стошеюю гидру, нанеся не более N ударов?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пример придумать несложно: соединяем один из городов со всеми остальными — всего 99 авиалиний. Почему меньше нельзя? Это классический факт: *в связном графе с B вершинами и P рёбрами всегда $P \geqslant B - 1$, причём равенство достигается в точности для дерева — связном графе без циклов.* Доказывается это по такому плану:

1) из любого связного графа можно удалить рёбра так, чтобы осталось дерево (если есть цикл, удаляем в нём любое ребро и показываем, что связность сохраняется);

2) в любом дереве есть висячая вершина, т. е. вершина степени 1 (стартуя из любой вершины, идём по рёбрам, проходя каждое не более одного раза, тогда рано или поздно придём в висячую вершину);

3) в любом дереве $P = B - 1$ (находим висячую вершину и удаляем её и выходящее из неё ребро, продолжаем этот процесс, пока не останется одна вершина и ни одного ребра — на каждом шаге P и B уменьшаются на 1 и в конце равенство $P = B - 1$ выполняется).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Находим в нашем связном графе *остовное дерево* — дерево на тех же вершинах (удаляем рёбра, пока не останется циклов). В этом дереве находим висячую вершину. Удаляем в исходном графе эту вершину и все выходящие из неё рёбра. Поскольку остовное дерево после удаления висячей вершины и выходящего из неё ребра осталось связным, то исходный граф тем более останется связным.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Решим задачу для сетки $m \times n$. Перед нами граф, в котором вершины — узлы сетки, а рёбра — верёвочки. Узлов $(m+1)(n+1)$, а рёбер $m(n+1)+n(m+1)$. Согласно факту про деревья (см. первую задачу), рёбер должно быть на единицу меньше, чем вершин, т. е. $(m+1)(n+1) - 1 = mn + m + n$. Значит, надо разрезать $m(n+1) + n(m+1) - mn - m - n = mn$ верёвочек. Пример: достаточно в каждом из mn квадратов разрезать нижнюю верёвочку. Кстати, это ещё один, более простой, способ получить ответ: очевидно, при таком разрезании получается дерево, а в любом дереве $P = B - 1$.

Ответ: 30000 верёвочек.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Если из A в B летает ковёр-самолёт, то назовём ребро AB синим, а если метла, то красным. Схема доказательства такая: если один из двух графов (синий или красный) не связный, то другой — связный. Итак, пусть, скажем, красный граф не связный. Возьмём любые два города X и Y и покажем, что от X к Y есть путь по синим рёбрам. Разберём два случая. Если ребро XY синее, то всё доказано. Пусть ребро XY красное. Поскольку красный граф несвязный, то есть вершина Z, от которой нельзя добраться до X и до Y по красным рёбрам. В частности, это значит, что рёбра XZ и YZ синие. Значит, от X можно добраться до Y по синим рёбрам с пересадкой в Z.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Первое соображение: достаточно отделить одну голову. Для этого достаточно обрубить шеи из соседей этой головы. Значит, если есть голова маленькой степени d (степень головы = число шей, из неё выходящих), то её можно отделить за d ударов. Но что если степени всех голов достаточно большие? Тогда выгодно, наоборот, взять голову наибольшей степени и обрубить все её шеи, чтобы из неё выросли шеи в остальные головы, которых мало. Труднее всего убить гидру, у которой степени всех голов *средние* — не очень большие и не очень маленькие. Формализуем эти качественные соображения.

Пусть у гидры n голов и их степени $d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Голову с номером i можно отделить как за d_i ударов (если зарубить шеи, выходящие из соседей этой головы), так и за $n - d_i$ ударов (если зарубить шеи из этой головы и затем сделать ещё $n-1-d_i$ ударов по шеям из соседних с ней голов). Сумма степеней $d_1 + \ldots + d_n$ всех вершин равна удвоенному числу рёбер, т. е. по условию задачи 200. Поэтому $d_1 \leqslant \dfrac{200}{n} \leqslant d_n$. Значит, гидру можно убить как за $\dfrac{200}{n}$, так и за $n - \dfrac{200}{n}$ ударов. Сумма этих чисел равна n, поэтому меньшее из них будет максимально возможным, когда эти два числа равны:

$$\frac{200}{n} = n - \frac{200}{n} \iff n^2 = 400 \iff n = 20.$$

При $n = 20$ эти числа равны 10.

Что доказывает это рассуждение? *Что любую стошеею гидру можно победить не более чем за 10 ударов.* Почему? Ещё раз, теперь уже с найденными числами.

Случай 1: есть голова степени $\leqslant 10$ — рубим все шеи из неё.

Случай 2: степени всех голов > 10 — тогда самих голов не так много, точнее, < 20, а значит, есть голова, степень которой после ударов по шеям всех её соседей будет < 10.

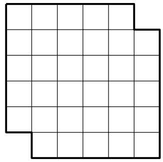
Мы не только доказали *утверждение выше,* но и показали, как прийти к оценке в 10 ударов.

Осталось понять, нельзя ли улучшить эту оценку. Из нашего анализа во втором абзаце следует, что если эта оценка достигается, то только на гидре с 20 головами по 10 шей из каждой. Пример такого графа (гидры) — двудольный граф из двух долей по 10 вершин (голов): рёбра (шеи) растут только между головами из разных долей. Разрубая все шеи из какой-то одной головы, мы перемещаем её в другую долю. Очевидно, что такую гидру нельзя победить, нанеся меньше 10 ударов.

Ответ: 10 ударов.

Листок 3. Раскраски

В задачах этого листка вам поможет та или иная раскраска доски.

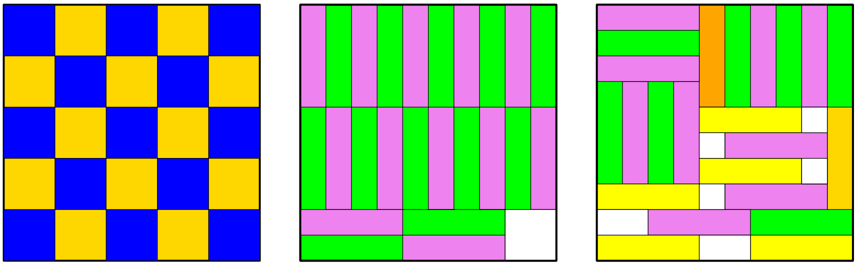


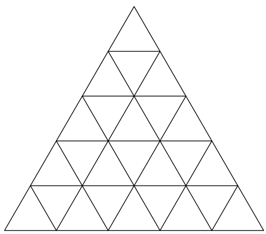
1 У доски 6×6 вырезали две угловые клетки на диагонали (см. рисунок). Можно ли разрезать оставшуюся часть на доминошки из двух клеток?

2 **Переполох.** В каждой клетке квадрата 5×5 сидит жук. Вдруг все жуки переползли на соседние клетки (по стороне). Возможно ли, что и теперь в каждой клетке сидит по жуку?

3 **Путешествие коня.** Шахматный конь хочет отправиться в путешествие по шахматной доске. Может ли он пройти с поля a1 на поле h8, побывав на каждом поле ровно по одному разу?

4 Незнайка легко замощает доску 10×10 квадратами 2×2, а вот полосками из четырёх клеток у него никак не получается (см. рисунки). А в принципе это возможно?





5 Треугольник разбит на треугольнички (25 штук), как показано на рисунке. Жук может ходить по треугольнику, переходя между соседними (по стороне) треугольничками. Какое максимальное количество треугольничков может пройти жук, если в каждом он побывал не больше одного раза?

6 Можно ли покрыть доску 6×6 одиннадцатью полосками из трёх клеток и одним уголком из трёх клеток?

Ответы и комментарии

В некоторых задачах требуется доказать, что на клетчатой доске, мозаике и т. п. что-то сделать невозможно, например, нельзя покрыть доску фигурками определённого типа или нельзя обойти конём все поля некоторой доски и т. д. В таких задачах на помощь часто приходит *раскраска*: доску красят в два цвета (или более), после чего противоречие оказывается на поверхности: например, клеток разного цвета оказывается разное количество, хотя для выполнения условия должно быть одним и тем же, или переход с одного поля на другое связан с переменой цвета, что противоречит чётности/нечётности числа ходов и т. д.

Самая распространённая раскраска — шахматная, и первые несколько задач посвящены именно ей. Полезно для примера разобрать первую задачу листка или какую-то другую, ещё более простую.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Раскрасим доску в шахматном порядке — чёрных и белых клеток будет разное количество (на доске 6×6 их поровну, а вырезанные клетки имеют один цвет). В то же время доминошка всегда покрывает одну чёрную и одну белую клетки, поэтому в любой клетчатой фигуре, разбитой на доминошки, чёрных и белых клеток поровну.

Ответ: нельзя.

В качестве доказательства невозможности школьники часто предъявляют несколько неудачных попыток покрыть доску. Терпеливо объясните им, почему это не доказательство, что нужно разобрать все возможные варианты расположения доминошек, каковых невообразимо огромное количество. В качестве подсказки предложите раскрасить доску в шахматном порядке.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Здесь опять помогает шахматная раскраска: перепозая на соседнюю клетку, жук меняет цвет клетки. Изначально чёрных клеток 13, а белых 12. Получается, что все 13 жуков, которые были на чёрных клетках, должны переползти на 12 белых, но тогда обязательно в какой-то белой клетке будет два жука, чего быть не должно.

Ответ: нет.

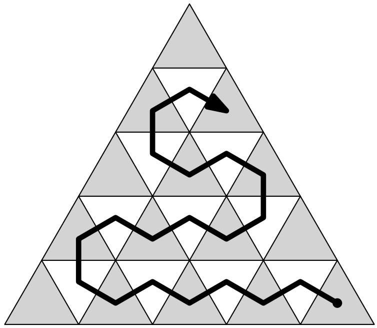
3 Школьники, знающие классическую задачу про обход конём шахматной доски, могут вас убеждать, что такое возможно. На самом деле, в классической постановке конь возвращается на исходное поле. Здесь же он начинает с поля a1 и приходит на поле h8 — это два угла одного цвета, поэтому конь должен сделать чётное число ходов, ведь каждым ходом он меняет цвет. В то же время он должен сделать 63 хода. ведь обошёл 64 поля, каждое по разу. Противоречие.

4 Эта задача сложнее предыдущих, поскольку в ней обычная шахматная раскраска не помогает, ведь она не различает квадрат 2×2 полоску из четырёх клеток — обе фигурки занимают две чёрных и две белые клетки. На помощь приходит шахматная раскраска в увеличенном масштабе — та, что показана на первом рисунке: всё поле 10×10 делится на 25 квадратов 2×2, и уже они раскрашиваются в шахматном порядке. Тогда общее число чёрных и белых квадратиков 1×1 будет разным (чёрных на 4 больше). В то же время полоска из четырёх клеток при любом расположении займёт две чёрные и две белые клетки, поэтому любая фигура, которую можно покрыть такими полосками, должна содержать поровну чёрных и белых клеток. Вот такое решение.

Отметим, что подходит и другая раскраска, при которой в каждом из указанных 25 квадратов 2×2 раскрашивается только один квадратик 1×1 в одном и том же месте (например, правый нижний). Подумайте, как решить задачу с помощью этой раскраски.

Ответ: нет.

5 Здесь вряд ли обойтись без «треугольной шахматной раскраски» (см. рисунок). Каждым ходом мы меняем цвет треугольничка, поэтому количества чёрных и белых треугольных клеток в нашем маршруте отличаются не более чем на один. Но чёрных клеток 15, а белых — 10, значит, всего мы можем обойти не более $10 + 11 = 21$ клетки. Один из примеров показан на рисунке.



6 Эта задача отличается от предыдущих тем, что в ней используется раскраска в три цвета. Вместо цветов можно также расставлять цифры 1, 2, 3 и тогда использовать дополнительные идеи делимости. Итак, расставим цифры следующим образом:

1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3

Легко видеть, что сумма цифр в любой полоске кратна 3 (в вертикальной полоске три одинаковых цифры, а в горизонтальной обязательно три разных $1, 2, 3$, в сумме дающих 6). А вот как ни клади уголок, в нём обязательно будут две одинаковые цифры и одна, от них отличающаяся, поэтому сумма цифр в уголке никогда не кратна 3. Значит, сумма цифр во всех двенадцати фигурках (если бы ими удалось покрыть доску) была бы не кратна 3, но это противоречит тому, что сумма цифр на всей доске кратна 3.

Ответ: нет.

Листок 4. Раскраски-2

$\boxed{\textbf{1}}$ На столе рубашкой вниз лежит игральная карта. Можно ли, перекатывая её по столу через ребро, добиться того, чтобы она оказалась на прежнем месте, но **а)** рубашкой вверх; **б)** рубашкой вниз и вверх тормашками?

$\boxed{\textbf{2}}$ Можно ли шахматную доску покрыть 15 горизонтальными и 17 вертикальными доминошками? (Каждая доминошка покрывает две клетки.)

$\boxed{\textbf{3}}$ Кусок сыра имеет форму кубика $3 \times 3 \times 3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает некоторый кубик $1 \times 1 \times 1$. После того, как мышь съедает очередной кубик $1 \times 1 \times 1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

$\boxed{\textbf{4}}$ На клетчатой бумаге отмечены произвольным образом 2000 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

$\boxed{\textbf{5}}$ Миша и Коля сыграли в «Морской бой» по необычным правилам. Миша расставил 21 трёхпалубный корабль (прямоугольник из трёх клеток) на доске 8×8, а Коля сделал один выстрел и... промахнулся. В какую клетку он мог стрелять? Укажите все возможные варианты.

Ответы и комментарии

Этот листок предлагается давать школьникам, уже познакомившимся с раскрасками на более простых задачах.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Считаем, что стол — это бесконечная плоскость, на которой начерчена прямоугольная сетка: плоскость разбита на прямоугольники размером с карту. Чтобы обоснованно ответить «нет» на оба вопроса, будем красить эту сетку в чёрный и белый цвета.

В пункте **а)** подойдёт шахматная раскраска: при каждом перекатывании меняется как цвет прямоугольника, в котором лежит карта, так и сторона, на которой она лежит (рубашкой вверх или вниз). Поэтому вернуться на то же место карта может только той же стороной.

В пункте **б)** шахматная раскраска уже не помогает: ведь при вертикальных перекатываниях верх и низ карты меняются местами, а при горизонтальных — нет. Нужно придумать раскраску, которая «реагирует» только на вертикальные перекатывания, т. е. только при них меняется цвет. Такова раскраска горизонтальных полос поочерёдно в два цвета.

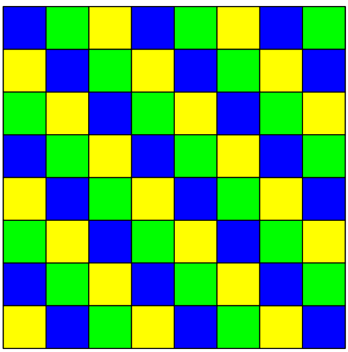
$\boxed{\mathbf{2}}$ В этой задаче помогает та же раскраска, что и в пункте **б)** предыдущей задачи: красим горизонтальные (можно и вертикальные) полосы поочерёдно в два цвета. Каждая горизонтальная доминошка занимает две клетки одного цвета, поэтому все горизонтальные доминошки занимают чётное число белых клеток и чётное число чёрных. Значит, и оставшаяся часть доски состоит из чётного числа белых и чётного числа чёрных клеток (поскольку всего и тех, и других по 32). Но каждая вертикальная доминошка покрывает одну чёрную и одну белую клетки, поэтому вертикальных доминошек должно быть чётное число. Таким образом, ответ на вопрос задачи отрицательный.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Многие школьники пытаются выдать свои неудачные попытки «обойти весь сыр» за доказательство того, что это невозможно. Такое решение можно принять только после полного перебора, а он довольно велик. Обычно у школьников не хватает ни терпения, ни культуры провести перебор аккуратно. Попытайтесь ненавязчиво отговорить школьника решать перебором и направить его на поиски идейного решения. Пусть вернётся к предыдущей задаче или вспомнит другой близкий сюжет с передвижением по соседним клеткам квадратного поля. Часто в таких задачах ключевую роль играет *шахматная раскраска* (не подсказывайте явно!).

Раскрасим куб $3\times3\times3$ в «трёхмерную шахматную раскраску» — будет 14 чёрных кубиков и 13 белых, включая центральный. Мышь каждым ходом меняет цвет, поэтому количества чёрных и белых съеденных ей кубиков не могут отличаться более чем на один, в то время, как всего их 14 и 12. Противоречие.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Ясно, что конкретные числа 2000 и 500 неважны — значение имеет, что 500 — это четверть от 2000. Раскрасим бесконечную клетчатую доску в четыре цвета так, чтобы никакие две соприкасающиеся клетки (в смысле условия задачи) были разных цветов. Проще всего раскрасить клетки квадрата 2×2 в четыре разных цвета и замостить его копиями всю плоскость. Рассмотрим на нашей плоскости данные нам 2000 клеток. Очевидно, в какой-то из четырёх цветов покрашено не менее четверти из этих 2000 клеток.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пример расстановки кораблей привести легко. Получится, пустая клетка, скажем, c3 (в шахматной нотации). Очевидно, из соображений симметрии, клетки c6, f3 и f6 тоже могут оказаться пустыми. Самое трудное — доказать, что никакие другие клетки оказаться пустыми не могут. Покрасим доску в 3 цвета так, чтобы любой корабль занимал клетки трёх разных цветов. Это легко — см. рисунок.



Одного цвета всегда будет больше — на нашем рисунке это синий. Теперь ясно, что пустая клетка покрашена в синий цвет, т. е. Коля стрелял в клетку, лежащую на одной из синих диагоналей. А теперь вновь применим симметрию — отразим раскраску относительно средней вертикали (или горизонтали) — направление диагоналей сменится, а пустая клетка по-прежнему должна быть синей. Остаётся заметить, что две серии синих диагоналей (до и после отражения) пересекаются как раз по четырём клеткам: c3, c6, f3, f6.

Листок 5. Комбинаторика

$\boxed{\textbf{1}}$ Сколькими способами можно прочитать слово СТРОКА, двигаясь по буквам вниз и вправо?

С Т Р О К А
Т Р О К А
Р О К А
О К А
К А
А

$\boxed{\textbf{2}}$ Сколькими способами можно разбить: **а)** четырёх человек на две пары; **б)** десять человек на пять пар; **в)** десять человек на две равные команды; **г)** девять человек на три тройки?

$\boxed{\textbf{3}}$ *Шахматы Фишера.* Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматные фигуры (короля, ферзя, две ладьи, два слона и два коня) так, чтобы слоны стояли на полях разного цвета и король стоял между ладьями (необязательно по соседству).

$\boxed{\textbf{4}}$ В выпуклом n-угольнике провели все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько всего точек пересечения у диагоналей?

$\boxed{\textbf{5}}$ Забор состоит из ста досок. Тётушка Полли поручила Тому Сойеру покрасить каждую доску в один из цветов: красный, жёлтый, синий, зелёный, при этом соседние доски должны быть непременно покрашены в разные цвета. Сколькими способами Том может выполнить задание, если доски в заборе стоят **а)** в ряд; **б)** по кругу?

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ Сначала мы выбираем, в какую букву Т пойти — в правую или нижнюю. Куда бы мы ни пошли, оттуда будет два варианта пойти в букву Р и т. д. Всего нам нужно пять раз сделать выбор «одно из двух»: куда идти — вправо или вниз. Поэтому ответ: $2^5 = 32$.

Школьники, понявшие суть задачи, могут ошибиться на 1, посчитав, что ответ 2^6. Чтобы не ошибаться на ± 1, всегда полезно разбирать случаи с малыми числами.

$\boxed{2}$ **а)** Этот пункт для разминки, а также для того, чтобы проверять на нём свои рассуждения в последующих пунктах. Очевидно, способов три: одному человеку (любому) достаточно выбрать, с кем из трёх других он будет в паре. (Пример: игра в пинг-понг «двое на двое».)

б) Будем двигаться от 4 человек к 10 последовательно, решив сначала задачи для 6 и 8 человек. Сколькими способами можно разбить 6 человек на три пары? Возьмём любого и попросим его выбрать себе пару — он это может сделать пятью способами. После этого останется четверо, а их можно разбить на пары, как мы знаем, тремя способами. Итого, $5 \cdot 3 = 15$ способов. Аналогично, компания из восьми человек сводится к компании из шести после того, как первый выберет себе в пару любого из семи. Теперь ясно, что для восьми человек ответ $7 \cdot 5 \cdot 3$, для десяти — $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$ и т. д.

в) Знакомые с числами сочетаний C_n^k могут сразу сказать, что ответ C_{10}^5 — надо просто выбрать пятерых, которые составят одну из команд. Но давайте проверим этот ответ и это рассуждение в пункте **а)**. В нём тогда получится $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$, т. е. вдвое больше, чем правильный ответ 3. Дело в том, что выбор из четырёх человек $1, 2, 3, 4$ пары $1, 2$ даёт то же разбиение, что и выбор дополнительной пары $3, 4$. Так же будет и с $2n$ людьми: *число способов выбрать n из $2n$ (равное C_{2n}^n) вдвое больше числа способов разбить $2n$ человек на две равные команды (при условии, что команды не занумерованы),* которое, таким образом, равно $C_{2n}^n/2$. При $n = 5$ получаем

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 126.$$

г) Вот аналогичное ошибочное рассуждение с сочетаниями: сначала выберем трёх из девяти, затем ещё трёх из оставшихся шести — итого $C_9^3 \cdot C_6^3$ способов. Это было бы правдой, если бы команды были занумерованы: $1, 2, 3$. Но у нас команды равноправны, так что полученный ответ надо разделить ещё на 3!. Итого

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 5 \cdot 7 = 280.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Успех в этой задаче зависит от порядка расстановки фигур. Проще, конечно, начать со слонов: одного ставим на любое из четырёх чёрных полей, другого — на любое из четырёх белых, итого 4^2 вариантов. Далее выберем одно из шести полей для ферзя. Остаётся пять полей. Выберем два из них для коней. Это можно сделать $C_5^2 = 5 \cdot 4/2 = 10$ способами. На оставшиеся три поля король и ладьи уже ставятся однозначно. Итак, ответ: $4^2 \cdot 6 \cdot 10 = 960$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ До самого короткого решения догадаться не так-то просто. Дело в том, что каждая точка пересечения диагоналей взаимно однозначно соответствует паре пересекающихся в ней диагоналей (именно потому, что никакие три диагонали не пересекаются в одной точке), а такая пара в свою очередь однозначно определяется четвёркой вершин n-угольника. Обратно, для каждой четвёрки вершин можно однозначно провести пару пересекающихся диагоналей с концами в этих вершинах. Таким образом, ответ — это число сочетаний $C_n^4 = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

Отметим, что задачу можно решить и непосредственно подсчитывая точки пересечения на каждой диагонали, однако этот путь довольно громоздкий — на нём придётся много и аккуратно суммировать.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пункт **а)** для разминки. Первую доску можно покрасить в любой из четырёх цветов, а каждую следующую — в любой, кроме цвета предыдущей, т. е. в любой из трёх. Поэтому ответ: $4 \cdot 3^{99}$. Пункт **б)** гораздо сложнее. Если рассуждать как в пункте **а)**, то возникнет проблема с сотой доской: не ясно, сколько для неё возможностей — две или три — это зависит от того, покрашены 1-я и 99-я доски в разные цвета или в один. Обозначим ответ для забора из n досок через x_n и найдём его при малых n. Очевидно, $x_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2$. Далее возьмём $n = 4$. Если записать ответ как в п. **а)**, т. е. $4 \cdot 3^3$, то мы ошибочно посчитаем те заборы, в которых первая и четвёртая доски покрашены в один цвет. Но можно считать, что это просто заборы из трёх досок, а их число мы знаем, это x_3. Итак, $x_4 = 4 \cdot 3^3 - x_3$. Аналогично, $x_5 = 4 \cdot 3^4 - x_4$ и, вообще, $x_n = 4 \cdot 3^{n-1} - x_{n-1}$. Выражая теперь x_{n-1} через x_{n-2} и так спускаясь до x_3, мы получим знакопеременную сумму:

$$x_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot 3^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} 4 \cdot 3 \cdot 2.$$

(Чтобы не запутаться в знаке последнего слагаемого, подставьте $n = 4$.) Последнее слагаемое x_3 удобно записать как $4 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1$, после чего останется просуммировать геометрическую прогрессию

$$x_n = 4 \cdot (3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - \ldots + (-1)^n 3).$$

Её знаменатель, если смотреть справа налево, равен -3, поэтому она «сворачивается» множителем $-3 - 1$ — домножим и разделим на него:

$$x_n = 4 \cdot \frac{-3^n - (-1)^n 3}{-3 - 1} = 3^n + 3 \cdot (-1)^n.$$

Ответ: $3^{100} + 3$.

Листок 6. На чём сэкономить?

1 Восесь кузнецов должны подковать десять лошадей. Каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут. Какое наименьшее время они должны потратить на работу? (Учтите, лошадь не может стоять на двух ногах, но может стоять на трёх.)

2 Папе, маме, сыну и бабушке понадобилось тёмной ночью перейти по хлипкому мостику через реку. Мостик может выдержать только двоих одновременно. К тому же на всех имеется только один фонарик, без которого нельзя сделать ни шагу. Папа может перейти через мостик в одну сторону за 1 минуту, мама — за 2 минуты, сын — за 5, а бабушка — за 10. За какое минимальное время все они смогут перебраться на другой берег? (Когда через мостик идут двое, они идут со скоростью того, кто ходит медленнее).

3 Найдите натуральное число с наименьшей суммой цифр, кратное 14.

4 В пруд пустили 30 щук, которые стали кушать друг друга. Щука считается сытой, если она съела хотя бы трёх щук. Какое наибольшее количество щук могло насытиться, если съеденные сытые щуки при подсчёте тоже учитываются?

5 На старт „Весёлого забега“ на 3000 м выходит команда из трёх математиков. Им выдаётся один одноместный самокат. Дорога прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Каково минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сначала найдём границу сверху. На одну лошадь уходит $5 \cdot 4$ минут, поэтому один кузнец подковал бы 10 лошадей за $5 \cdot 4 \cdot 10$ минут. Восемь кузнецов могут сделать эту работу в восемь раз быстрее (но никак не меньше!), если им удастся работать без простоев. Итак, понадобится заведомо не менее $5 \cdot 4 \cdot 10/8 = 5 \cdot 5 = 25$ минут. Теперь приведём пример. Поскольку 25 на 4 не делится, то простейший способ, при котором каждый кузнец занимается своими лошадьми по очереди, не проходит (число минут при такой работе кратно четырём). Разобьём кузнецов и лошадей на две равные группы и покажем, как за 25 минут 4 кузнеца A, B, C, D смогут подковать 5 лошадей $1, 2, 3, 4, 5$:

1) A1, B2, C3, D4;
2) A1, B2, C3, D5;
3) A1, B2, C5, D4;
4) A1, B5, C3, D4;
5) A5, B2, C3, D4.

Объяснить схему можно так: у каждого кузнеца есть своя лошадь: у A – 1, у B – 2, у C – 3, у D – 4, он её и подковывает, но подковав одну ногу, кузнец отвлекается на какую-то следующую пятиминутку, чтобы подковать одну ногу пятой лошади. Как видим, каждую лошадь подковывали 4 раза.

Эту задачу полезно давать после задачи про поджарку котлет: *за какое наименьшее время можно пожарить можно пожарить три котлеты с двух сторон, если каждую котлету надо пожарить с двух сторон и на каждую сторону уходит 3 минуты?*

Ответ: 25 минут.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Числа с суммой цифр 1 имеют вид $10\ldots0$. Такие числа на 7, а значит, на 14 не делятся (их простые делители — только двойки и пятёрки). Число с суммой цифр 2 имеют вид $20\ldots0$ и $10\ldots010\ldots0$. Числа первого вида на 7 не делятся. Чтобы число второго вида разделилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось на 0 (а не на 1) и чтобы число $10\ldots01$, с которого оно начинается было кратно 7. Дописывая постепенно нули между двумя единицами, быстро находим число, кратное 7: $1001 = 7 \cdot 143$. Итак, подойдёт число 10010.

Заметим, что разложение $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ хорошо известно. На нём основано признаки делимости на 7 и 13.

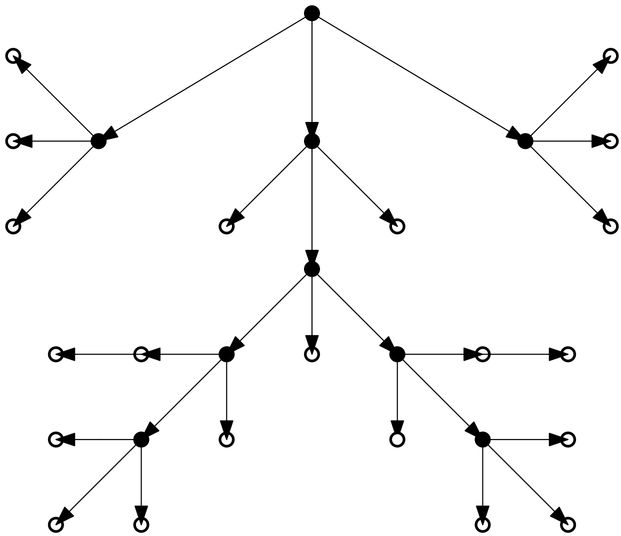
$\boxed{\mathbf{3}}$ Ключевая идея в этой задаче — двое самых медленных (сын и бабушка) должны идти вместе. Решение, в котором они идут порознь, оказывается заведомо неоптимальным, и обычно школьники пытаются сдать такие решения, говоря, что „быстрее не получается“.

Вот так можно перейти реку за 17 минут: папа с мамой переходят на ту сторону (2 мин); папа возвращается с фонариком (1 мин); сын и бабушка переходят реку (10 мин); мама берёт фонарик и возвращается (2 мин); папа с мамой переходят ещё раз на ту сторону (2 мин).

Чтобы доказать, что быстрее нельзя, нужно аккуратно разобрать возможные случаи. Если сын идёт отдельно от бабушки, они уже тратят 15 мин, и легко видеть, что за оставшиеся 2 мин папа с мамой не успеют вовремя доставить фонарик и переправиться сами. Если же сын идёт вместе с бабушкой, необходимо, чтобы перед их переходом папа и мама находились на разных берегах реки. Действительно, если они оба находятся на том берегу, то при них находится и фонарик (иначе как бы они попали на тот берег?), и сын с бабушкой не могут идти. Если же они на этом берегу, то они не смогут перейти на другой берег, потому что сын с бабушкой унесут фонарик. Если на том берегу была мама, то, чтобы её перевести туда и вернуть фонарик, папе понадобится 3 мин, а потом, чтобы перевести папу, маме понадобится 4 мин. Случай, когда мама остаётся на этом берегу, симметричен и требует соответственно 4 мин до и 3 мин после перехода сына и бабушки.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Оценка:* 10 или больше щук сытыми быть не могут, иначе были бы съедены хотя бы 30 щук, то есть вообще все щуки.

Пример. Вот один из примеров (пустые кружочки — голодные щуки, закрашенные — сытые):



$\boxed{5}$ *Пример.* Первый едет треть пути на самокате, бросает его, бежит дальше пешком. Второй бежит треть пути, хватает валяющийся самокат, берёт его, едет треть пути, бросает, бежит дальше пешком. Третий бежит две трети пути, хватает самокат и финиширует одновременно со сокомандниками. В итоге каждый треть пути (1 км) едет и две трети пути (2 км) бежит. Значит, каждый спортсмен тратит $1000{:}250 + 2000{:}125 = 20$ минут на преодоление дистанции.

Оценка. Очевидно, что возвращаться назад, чтобы передать транспортное средство товарищу, невыгодно. Поэтому на самокате нужно двигаться только вперёд. Если кто-то проедет на самокате менее трети дистанции, то он потратит на весь забег более 20 минут. Значит, всем нужно проехать ровно треть.

Ответ: 20 минут.

Листок 7.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Миша, Паша, Саша, Яша и Наташа провели турнир по настольному теннису, играя парами так, что каждые двое сыграли с каждыми двумя другими один раз. В результате Саша проиграл 12 игр, а Яша — 6. Сколько игр выиграла Наташа? (Ничьих в теннисе не бывает.)

$\boxed{\mathbf{2}}$ В остроугольном треугольнике наименьший угол составляет $1/5$ наибольшего, величины всех углов составляют целое число градусов и все эти величины различны. Определите их.

$\boxed{\mathbf{3}}$ У крестьянина были коза, корова, кобыла, стог сена и сын. Сын подсчитал, что сена хватит козе и кобыле на месяц, кобыле и корове на треть месяца, а корове и козе — на три четверти месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Почему отец решил, что сын ошибся?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Первое, что бросается в глаза — почему вдруг Наташа? Если ответ единственный, то он должен быть один и тот же для всех трёх игроков, кроме Саши и Яши. Из этих соображений, кстати, его можно найти, посчитав общее число разыгранных очков и число партий с участием каждого. Но давайте решать «честно».

Сколько партий сыграл каждый? Он может быть в паре с любым из четырёх других игроков и ещё один из трёх оставшихся в игре не участвует. Итого, $4 \cdot 3 = 12$ игр. По условию Саша проиграл 12 раз, т. е. он проиграл все свои игры. Сколько раз против Саши играл любой другой игрок? Надо выбрать одного из трёх, кто будет на стороне этого игрока, и одного из двух оставшихся, кто будет на стороне Саши. Итого, $3 \cdot 2 = 6$ игр. Итак, каждый, кроме Саши, получил 6 очков за игры против него. В частности, Яша других очков не получил, поэтому игры с его участием без Саши закончились поражением его команды. Наташа выиграла 6 игр против Саши и сыграла ещё три игры без его участия: в одной из них она играла с Яшей и проиграла, а в двух других играла против Яши и выиграла. Таким образом, Наташа (как и Миша, и Паша) получила 8 очков.

Ответ: 8.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть наименьший угол треугольника равен x°, тогда наибольший равен $5x^\circ$, а оставшийся по теореме о сумме углов треугольника равен $(180 - 6x)^\circ$. По условию

$$x < 180 - 6x < 5x < 90$$

(последнее неравенство означает, что треугольник остроугольный). Решим каждое неравенство:

$$\begin{cases} x < \dfrac{180}{7} = 25\dfrac{5}{7} \\ x > \dfrac{180}{11} = 16\dfrac{4}{11} \\ x < 18. \end{cases}$$

Поскольку по условию x — целое число, то $x = 17$.

Ответ: 17°, 78°, 85°.

$\boxed{\textbf{3}}$ Пусть коза поедает x стогов в месяц, корова — y, а кобыла — z. Тогда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 3 \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Сложив все уравнения, получим, $2(x + y + z) = 1 + 4 + \frac{4}{3}$, откуда $x+y+z = 2\frac{2}{3} < 3 = y+z$, выходит, $x < 0$, что, очевидно, невозможно.

У школьников могут возникнуть трудности с обратными числами в системе. Надо помнить, что производительность — это единица работы за единицу времени, в нашем случае она измеряется дробями стоги/месяц. За x, y, z мы обозначили производительности (только числа без наименований), поэтому, скажем, число 3 во втором уравнении получилось как отношение одного стого, имеющегося у крестьянина на 1/3 месяца, за которую, по предположению сына, его съедят корова с кобылой.

Листок 8. Чётность

$\boxed{\mathbf{1}}$ Николай с сыном и Пётр с сыном пошли на рыбалку. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Пётр — столько же, сколько его сын. Все вместе поймали 27 рыб. Сколько рыб поймал Николай?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На столе стоят семь стаканов — все вверх дном. За один ход можно перевернуть любые четыре стакана. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли правильно?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов двух целых чисел?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В начале времён в Ачухонии жили 100 рыцарей, 99 принцесс и 101 дракон. Рыцари убивают драконов, драконы едят принцесс, а принцессы изводят до смерти рыцарей. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других жителей. Сейчас в Ачухонии остался всего один житель. Кто это?

$\boxed{\mathbf{5}}$ На шахматной доске стоят восемь не бьющих друг друга ладей. Докажите, что число ладей, стоящих на чёрных клетках, чётно.

$\boxed{\mathbf{6}}$ В однокруговом турнире по матбоям участвовали восемь команд из восьми разных школ. Каждый бой проходил в одной из школ-участниц. Могло ли случиться так, что каждая команда сыграла во всех школах, кроме своей?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Типичная первая реакция на задачу: „Как такое может быть? Ведь 27 на 2 не делится.“ Значит, человек всего не четверо, а трое: Пётр — сын Николая или наоборот. Легко видеть, что это единственно возможный вариант. Итак, Николай, как и все, поймал 9 рыб.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Это простая задача, в которой чётность выступает в роли инварианта. Конкретно — чётность правильно поставленных стаканов не меняется с каждым ходом. Полезно отметить, что это верно, даже если бы мы переворачивали стаканы не по 4, а по 2. С одной стороны, с двумя стаканами это ещё более очевидно, а с другой — получается более общая ситуация (так как переворачивая по два стакана, можно переворачивать и по четыре — за два хода по два). Остаётся заметить, что в начале и в конце эти чётности разные. Кстати, иногда у школьников возникают трудности с чётностью нуля.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Для разнообразия задача по алгебре — надо решить в целых числах уравнение $x^2 - y^2 = 101010$ или $(x-y)(x+y) = 101010$. Поскольку правая часть чётна, то один из множителей в левой части тоже. Но числа $x+y$ и $x-y$ имеют одинаковую чётность (поскольку отличаются на чётное число $2y$), а значит, оба чётны. Но тогда их произведение делится на 4, в то время как 101010 на 4 не делится (достаточно взглянуть на две последние цифры).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Название листка может подсказать, что ответ — рыцари, ведь их чётность отличается от чётности драконов и принцесс. Однако любые попытки привести пример взаимного уничтожения с выжившим рыцарем терпят крах. И неслучайно. Проанализируем: 99 рыцарей погибли — их могли извести только принцессы, но тогда хоть одна принцесса извела нечётное число рыцарей. Как же её мог съесть дракон, не нарушив древнее заклятие? Итак, рыцари отпадают. Аналогично, не могла остаться принцесса, поскольку драконов нечётное число и раз все они убиты рыцарями, то какой-то рыцарь должен был убить нечётное число драконов, но тогда этого рыцаря нельзя изводить. Остаётся только вариант, что остался дракон. Строго говоря, если условие задачи не ставится под сомнение, то приводить пример, как мог остаться дракон, не требуется после приведённых рассуждений — ведь остальные возможные варианты исключены. Но сделать это не помешает, к тому же это совсем легко. К примеру, сначала рыцарь убивает сто драконов, потом принцесса изводит всех ста рыцарей, наконец, оставшийся дракон съедает всех принцесс.

Важно, что необходимо обосновать, что мог остаться только дракон (т. е. только примера точно не достаточно). Вот, кстати, более короткий способ это сделать. Пусть жители — это иксы, игреки и зеты, причём иксы убивают игреков, игреки — зетов, и зеты — иксов. Пусть в живых остался икс. Всего жителей чётное число, раз остался один, то нечётное число были убиты, значит, на чьём-то счету нечётное число жертв. Этого кого-то запрещает убивать заклятие, поэтому он и остался в живых. Пусть это икс. Его жертв среди игреков нечётное число, а остальных игреков чётное число, поскольку их убийцы убиты. Значит, игреков всего нечётное число. С другой стороны, всех остальных иксов, кроме выжившего, тоже чётное число, поскольку иначе кто-то из убитых зетов должен был убить нечётное число иксов. Итак, иксов и их жертв игреков нечётное число. Из условия, иксы — это драконы, а игреки — принцессы.

Ответ: дракон.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Это не такая простая задача. Если школьник показал несколько примеров, то спросите, сколько всего возможных расстановок, и объясните, что перебором задачу не решить. Приведём два решения.

Первое решение. Занумеруем вертикали и горизонатали по порядку числами от 1 до 8 и сопоставим тем самым каждой клетке пару номеров (вертикали и горизонтали, в пересечении которых она находится). Например, вместо d3 пишем $(4, 3)$. Чёрные клетки — это в точности те, у которых сумма координат чётна. Надо доказать, что число ладей, стоящих в таких клетках, чётно. Пусть ладьи стоят в клетках (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 8$. Поскольку ладьи стоят в разных вертикалях и разных горизонталях, то в каждой горизонатали и каждой вертикали стоит по ладье, следовательно,

$\{x_1, \ldots, x_8\} = \{y_1, \ldots, y_8\} = \{1, \ldots, 8\}$, откуда

$$x_1 + y_1 + \ldots + x_8 + y_8 = 2(1 + 2 + \ldots + 8).$$

Поэтому нечётных слагаемых вида $(x_i + y_i)$ чётное число, а тогда и чётных слагаемых $(x_i + y_i)$ тоже чётное число. Но такие пары как раз отвечают чёрным клеткам.

Второе решение. Для любой конкретной расстановки ладей (скажем, по чёрной диагонали) утверждение очевидно. Несложно показать, что любую расстановку ладей можно получить из любой другой несколькими преобразованиями вида

$$(a, b),\ (c, d) \mapsto (a, d),\ (c, b)$$

(это переформулировка известного факта, что всякую перестановку можно представить в виде произведения транспозиций). Остаётся проанализировать, что при любом указанном преобразовании чётность числа ладей на чёрных местах не меняется.

$\boxed{\textbf{6}}$ Пусть такое случилось. Первая команда играла со всеми по разу и во всех школах по разу. То же верно для любой команды. Значит, в каждой школе играли все остальные семь по разу. Но это невозможно, поскольку они должны были играть парами. Противоречие.

Ответ: нет, не могло.

Листок 9. Одна задача – хорошо, а две – лучше

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** Разрежьте фигуру на рисунке 1, составленную из пяти квадратов, на части и сложите из них один квадрат.

б) Каждая сторона квадрата разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с вершинами треугольника так, как показано на рисунке 2. Во сколько раз площадь большого квадрата больше площади закрашенного?

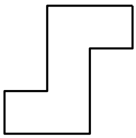


Рисунок 1

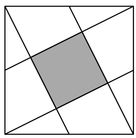


Рисунок 2

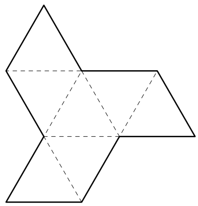


Рисунок 3

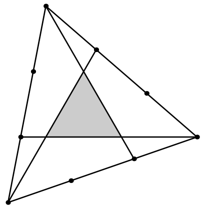


Рисунок 4

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Разрежьте фигуру на рисунке 1, составленную из семи правильных треугольников, на четыре части и сложите из них правильный треугольник.

б) Каждая сторона правильного треугольника разделена на три равные части, и некоторые из точек деления соединены с вершинами треугольника так, как показано на рисунке 2. Во сколько раз площадь большого треугольника больше площади закрашенного?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** На рисунке 5 в трапеции проведены диагонали. Докажите, что площади зелёных треугольников равны.

б) *Задача Абу-ль Вефы* (из „Книги о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений“, X век н. э.). На рисунке 6 $BE = EC$. Докажите, что отрезок GD делит $\triangle ABC$ на две равновеликие части.

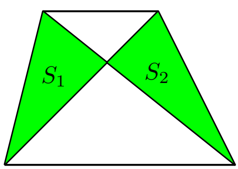


Рисунок 5

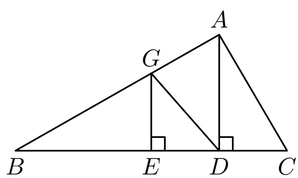
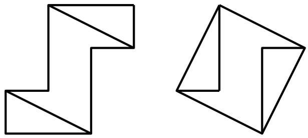


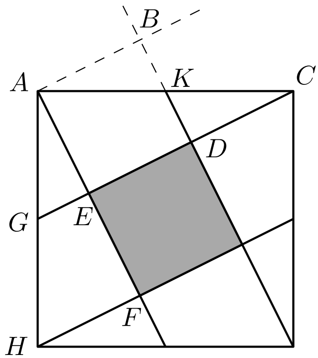
Рисунок 6

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ **а)** Площадь квадрата, который должен быть составлен, равна 5, поэтому его сторона равна $\sqrt{5}$. На клетчатой бумаге это диагональ прямоугольника 1×2, поскольку по теореме Пифагора $5 = 1^2 + 2^2$. Теперь найти линии разреза несложно, см. рисунок.



б) Идея ясна на следующем рисунке, на котором проведена прямая AB параллельно DE и точка B лежит на прямой DK. Стороны закрашенного квадрата продлены до пересечения в точке B. Закрашенный квадрат равен квадрату $ABDE$, равновеликого с треугольником ACE ввиду $\triangle ABK = \triangle ABK$ (по гипотенузе и острому углу).



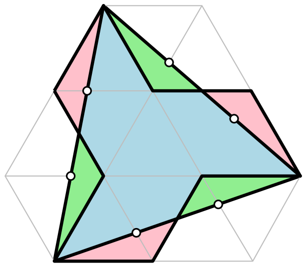
Большой квадрат, таким образом, состоит из пяти фигур — четырёх треугольнико, равных $\triangle ACE$ и равновеликому их закрашенному квадрату. Значит, ответ: в 5 раз.

Формально надо ещё обосновать, почему $ABDE$ — квадрат (равный закрашенному), а хорошо бы ещё понимать, что закрашенная фигура — квадрат! Несмотря на всю очевидность, доказательство этих фактов требует известной аккуратности и использует теорему Фалеса либо теорему о средней линии или что-то подобное.

Прежде всего отметим, что закрашенная фигура — квадрат, поскольку переходит в себя при повороте на 90° вокруг центра большого квадрата (поскольку наклонные отрезки переходят последовательно друг в друга вслед за их концами). В частности, $AE \parallel DK$, а по построению $AB \parallel DE$. По доказанному $\angle AED = 90^\circ$ и $ABDE$ — прямоугольник. Наконец $AE = EF$, так как $AG = GH$ и $GE \parallel HE$, а $FE = DE$, откуда $AE = DE$, и всё обосновано.

Мы советуем не подходить слишком строго к этим обоснованиям. Многое зависит от пройденного в школе к этому моменту. Если школьник догадался до главной идеи и получил правильный ответ, однако затрудняется с обоснованием всех мелочей, стоит ему в этом немного помочь.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Решения обоих пунктов ясно из следующей картинки:



Из свойств параллелограмма следует, что красные треугольнички равны зелёным, а равенство сторон полученного треугольника очевидно из тех же соображений поворота (как в предыдущей задаче), только теперь на 120° (при таком повороте вокруг центра «винт» на рисунке 3 переходит в себя). Это и есть требуемое разрезание. Осталось понять, что это тот же треугольник, что на рисунке 4. Дело в том, что если нарисовать на треугольной сетке правильный треугольник как на рисунке выше, то линии сетки разделят его стороны на три равные части по теореме Фалеса. Итак, ответ к пункту **б)**: в 7 раз.

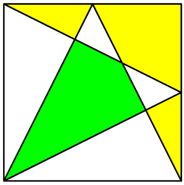
$\boxed{\mathbf{3}}$ Пункт **а)** — важное вспомогательное утверждение. Доказательство совсем простое: если присоединить к обоим зелёным треугольничкам нижний треугольник (можно и верхний), то получатся два треугольника с общим основанием и равными высотами (их высоты — это высоты трапеции), т. е. получатся равновеликие треугольники. Значит, и исходные, зелёные треугольники равновелики.

б) Проведём в трапеции $ADEG$ диагональ AE и пусть она пересекает диагональ DG в точке O. Тогда треугольники AOG и DOE равновелики по пункту **а)**, а значит, прямые DG и AE одновременно делят (или не делят) треугольник ABC на две равновеликие части. Но AE этим свойство, очевидно, обладает, так как является медианой в этом треугольнике. Вот и всё решение.

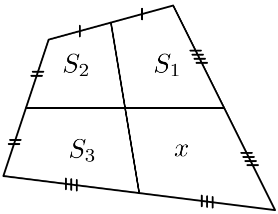
Понятно, почему эта задача нужна ремесленникам: в ней мы ловко перекроили фигуру.

Листок 10. Сшит колпак, да не по-колпаковски

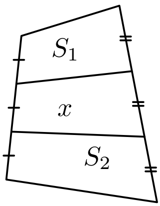
1 В квадрате середины двух сторон соединили с вершинами, как показано на рисунке. Докажите, что жёлтая и зелёная части равновелики.



2 Найдите неизвестную площадь x по рисунку:

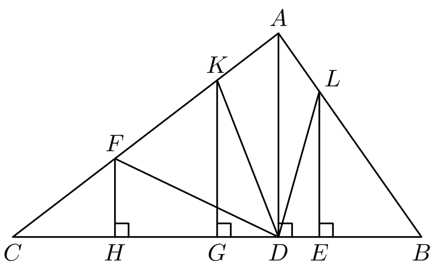


а)

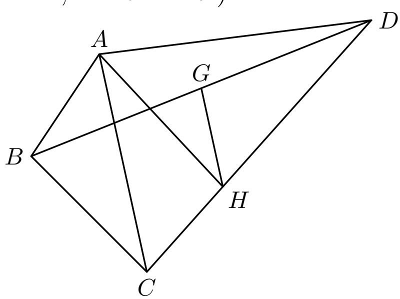


б)

3 *Задачи Абу-ль Вефы* (из „Книги о том, что необходимо ремесленнику из геометрических построений“, X век н. э.).

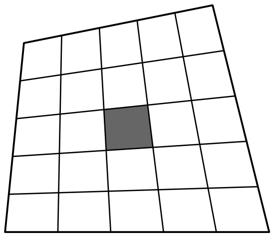


а) $BE = EG = GH = HC$. Докажите: $S_{CFD} = S_{FKD} = S_{KALD} = S_{LBD}$.



б) $BG = GD$, $GH \parallel AC$. Докажите: $S_{ABCH} = S_{ADH}$.

4 Каждая из сторон выпуклого четырёхугольника разделена на пять равных частей и соответствующие точки противоположных сторон соединены. Докажите, что площадь среднего (закрашенного) четырёхугольника в 25 раз меньше площади исходного.



Ответы и комментарии

Этот листок — продолжение предыдущего.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Присоединим к каждой фигуре (зелёной и жёлтой) синюю область, закрашенную на рисунке:

Синяя область вместе с зелёной образует треугольник, по площади равный половине площади квадрата, а вместе с жёлтой синяя область образует дополнение до другого такого же треугольника. Отсюда следует утверждение задачи.

$\boxed{\mathbf{2}}$ В пунктах этой задачи содержится важная идея *триангуляции* — разбиения фигуры на треугольники. Поскольку с площадями четырёхугольников работать не особенно удобно, будем проводить в них диагонали, разбивая на треугольники, с которыми всё гораздо проще.

а) Соединим точку пересечения проведённы отрезков с вершинами четырёхугольника, тогда он будет разбит на четыре треугольника, в каждом из которых проведена медиана. Пользуясь тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих, раскрасим равновеликие треугольники одинаковыми цветами. Теперь видно, что $S_1 + S_3 = S_2 + x$, откуда $x = S_1 + S_3 - S_2$.

б) Проведём диагонали следующим образом:

У закрашенных треугольников основания равны, а высоты, на них опущенные, образуют арифметическую прогрессию (следует из свойств средней линии треугольника или из теоремы Фалеса), поэтому площади этих треугольников тоже образуют арифметическую прогрессию. Всё сказанное также относится и к незакрашенным треугольникам, а следовательно, и площади S_1, x, S_2 четырёхугольников образуют арифметическую прогрессию, откуда $x = \dfrac{S_1 + S_2}{2}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Это продолжение первой задачи Абу-ль Вефы (задача **3б)** прошлого листка), согласно которой, отрезок KD в пункте **а)** делит треугольник ABC на две равновелликие части. Осталось доказать два равенства: $S_{CFD} = S_{KFD}$ и $S_{KALD} = S_{LBD}$. Первое совсем простое: поскольку $CH = HD$, то $CF = FK$. Для доказательство второго равенства дважды применим трюк, использованный в задаче **3б** прошлого листка, а именно, DK заменим на AG, а DL на AE. Формально имеем:

$$S_{DKA} = S_{DGA},\ S_{DLA} = S_{DEA} \Longrightarrow S_{KALD} = S_{GAE},$$

с другой стороны, $S_{GAE} = S_{BAE}$ ввиду равенства $GE = EB$. Утверждение пункта **а)** доказано.

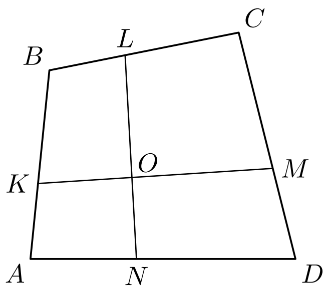
б) Проведём через точку B прямую, параллельную AC. Пусть она пересекает прямую DC в точке B'. Поскольку треугольники ABC и $AB'C$ равновелики, то задача равносильна такой: отрезок AH делит треугольник $B'AD$ на два равновеликих. Но это очевидно, ведь AH — медиана в этом треугольнике ($B'H = HD$, так как $BG = GD$ и $GH \parallel AC$).

$\boxed{4}$ Сначала докажем следующую лемму, обобщающую теорему Вариньона.

Лемма. Пусть на сторонах выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки $KLMN$ так, как показано на рисунке, и

$$\frac{AK}{BK} = \frac{DM}{MC} = \frac{CL}{LB} = \frac{DN}{NA} = k.$$

Тогда диагонали четырёхугольника $KLMN$ делятся точкой пересечения O в том же отношении: $\dfrac{MO}{OK} = \dfrac{NO}{OL} = k$. (Заметим, что при $k = 1$ получается теорема Вариньона, гласящая, что $KLMN$ — параллелограмм.)



Доказательство леммы. Проведём KM, LN и BD. Треугольники BAD и KAN подобны с коэффициентом $\dfrac{AB}{AK} = 1 + \dfrac{1}{k} = \dfrac{k+1}{k}$, а треугольники BCD и LCM подобны с коэффициентом $\dfrac{BC}{LC} = 1+k$, отсюда $KN \parallel BD \parallel LM$ и

$$KN : LM = \frac{KN}{BD} : \frac{LM}{BD} = \frac{k}{k+1} : \frac{1}{k+1} = k.$$

Из параллельности KN и LM следует, что треугольники KON и MOL подобны, а из цепочки равенств выше — что коэффициент их подобия равен k. Таким образом,

$$KO : OM = NO : OL = KN : LM = k.$$

Лемма доказана.

Приступим теперь к решению задачи. Оно состоит из двух ингредиентов: только что доказанной леммы и задачи **2б)**, точнее, её обобщения на случай, когда противоположные стороны четырёхугольника делятся на любое нечётное число равных частей.

Обратимся к исходному чертежу и будем условно называть проведённые линии вертикальными и горизонтальными. Согласно аналогу задачи **2б)**, средняя вертикальная полоска (четырёхугольник, содержащий центральную клетку и клетки в том же вертикальном ряду) занимает пятую часть от площади всего четырёхугольника. Согласно лемме, вертикальные стороны этой полоски делятся горизонтальными на пять равных частей, а тогда, снова применяя аналог задачи **2б)**, получаем утверждение задачи: центральная клетка занимает пятую часть полоски, а значит, двадцать пятую часть четырёхугольника.

Листок 11. В целых числах

$\boxed{\mathbf{1}}$ Поставьте вместо звёздочек такие цифры, чтобы число $32*35717*$ делилось на 72.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Вася задумал целое число. Коля умножил его не то на 5, не то на 6. Женя прибавил к результату Коли не то 5, не то 6. Саша отнял от результата Жени не то 5, не то 6. В итоге получилось 73. Какое число мог задумать Вася? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Придумайте какие-нибудь натуральные x, y, z, для которых

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ На какую цифру оканчивается число 7^{7^7}?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Решите уравнение $4x^2 - 1 = y^3$ в целых числах.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Легко посчитать, что $12^2 = 144$, $38^2 = 1444$. А может ли полный квадрат оканчиваться четырьмя четвёрками?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Делимость на 72 равносильна делимости на 8 и на 9. Делимость на 9 равносильно делимости суммы цифр на 9, а делимость на 8 — тому, что трёхзначное число, на которое оканчивается данное число, делится на 8. Обозначив цифры на месте звёздочек через x и y, получим:

$$\begin{cases} 3+2+3+5+7+1+7+x+y \,\vdots\, 9 \\ 170+y \,\vdots\, 8 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+1 \,\vdots\, 9 \\ y=6 \end{cases}$$

Отсюда $x+7 \,\vdots\, 9$ и $x=2$.

Ответ: 32**2**35717**6**.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Конечно, можно перебрать все 2^3 случаев, составив в каждом случае уравнение, но это крайне не рационально. После васиного умножения получилось число, кратное 5 или 6. После действий Жени и Саши это число либо не изменилось, либо изменилось на 1. Но мы знаем, что получилось 73. Это число не кратно 5 и 6, как и следующее число 74. А предыдущее число 72 кратно 6, но не 5. Это автоматически означает, что именно 72 и получил Вася, которое он получил, стало быть, умножением именно на 6 числа $72/6=12$.

Заодно ясно, что Женя прибавил 5, а Саша отнял 6, но это в задаче не спрашивается.

Ответ: 12.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Проще всего подобрать такие числа, если интерпретировать это равенство как подсчёт числа дней в невисокосном году. 28 дней только в феврале, 30 дней в каждом из четырёх месяцев (апрель, июнь, сентябрь, ноябрь) и 31 день в остальных семи.

Конечно, школьники могут приводить свои примеры, и их нужно проверять. При возникновении трудностей спросите у школьника, с чем у него ассоциируется число 365.

Ответ: например, $x=1$, $y=4$, $z=7$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Отметим, что 7 возводится в степень 7^7, иногда возникают вопросы о порядке возведения в степень. Выпишем последние цифры нескольких первых степеней семёрки, всякий раз умножая последнюю цифру предыдущей степени на 7:

$$7^0 = 1,\ 7^1 = 7,\ 7^2 = 49,\ 7^3 = \ldots 3,\ 7^4 = \ldots 1,\ 7^5 = \ldots 7, \ldots$$

Мы не случайно начали с нулевой степени, равной 1. Ясно, что после 1 мы всегда получим 7. Как видим, процесс зациклился с периодом 4: 7^{4k+r} оканчивается на 1 при $r = 0$, на 7 при $r = 1$, на 9 при $r = 2$ и на 3 при $r = 3$. Значит, надо понять, какой остаток при делении на 4 даёт число 7^7. Степени семёрки нечётны и потому при делении на 4 могут давать остатки 1 и 3, которые, как легко видеть чередуются (как и раньше, после 1 процесс зацикливается, но теперь с шагом 2). Итак, $7^7 \equiv 7^1 \equiv 3 \pmod 4$, поэтому 7^{7^7} оканчивается на 3.

Ответ: 3.

5 Левая часть $(2x-1)(2x+1)$ представляет собой произведение двух последовательных нечётных чисел. Такие числа, очевидно, взаимно просты (их общий делитель является делителем их разности, т. е. числа 2, но отличен от 2, так как числа нечётные). Произведение двух взаимно простых чисел может быть полным кубом, только если они сами — полные кубы (это следует из основной теоремы арифметики, которая в школе не доказывается и вообще является не таким простым фактом, так что требовать от школьников обоснования, мы считаем, не следует). Но среди полных кубов

$$\ldots, -8, -1, 0, 1, 2, 8, \ldots$$

только 1 и -1 отличаются на 2, поэтому $2x+1 = 1$, $x = 0$ и $y = -1$.

Ответ: $x = 0$, $y = -1$.

6 Пусть есть такое натуральное n, что n^2 оканчивается на 4444, т. е. $n^2 - 4444 \,\vdots\, 10^4$. Очевидно, n чётно, но не кратно 4, иначе $n^2 \,\vdots\, 16$, но 4444 не кратно 16. Пойдём дальше по степеням двойки и посмотрим на n сразу по модулю 16. У нас остаются такие варианты:

$n \pmod{16}$	± 2	± 6
$n^2 \pmod{16}$	4	$36 \equiv 4$

В то же время $4444 \equiv 12 \pmod{16}$. Противоречие.
Ответ: нет.

Листок 12. Рыцари и лжецы

$\boxed{\mathbf{1}}$ На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: „Сколько рыцарей среди твоих спутников?” Первый ответил: „Ни одного”, второй ответил: „Один”. Что сказал третий?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Путешественник, попавший на остров рыцарей и лжецов, встретил четырёх островитян и задал им вопрос: „Кто вы?” Он получил такие ответы:

Первый: „Все мы лжецы”.

Второй:„Среди нас один лжец”.

Третий: „Среди нас два лжеца”.

Четвёртый:„Я ни разу в жизни не соврал, и сейчас не вру”.

Путешественник сразу сообразил, кем является четвёртый островитянин. Как он это сделал?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Однажды на острове судили трёх обвиняемых, о которых известно, что среди них один иностранный шпион (может говорить так, как ему удобно — иногда говорит правду, иногда врёт), один рыцарь и один лжец (но неизвестно, кто есть кто). Они дали следующие показания:

Первый: „Третий обвиняемый — лжец”.

Второй: „Первый обвиняемый — рыцарь”.

Третий: „Я шпион”.

Кто шпион?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Социологи опросили всех жителей острова. Некоторые аборигены заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные — что на острове нечётное число лжецов. Можно ли определить, чётно или нечётно: **а)** число рыцарей; **б)** число жителей острова?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В одном из посёлков на острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов, у каждого из которых есть ровно один друг. Однажды утром каждый житель посёлка произнёс либо фразу „Мой друг — рыцарь”, либо фразу „Мой друг — лжец”, причём каждую фразу произнесло ровно 100 человек. Найдите наименьшее возможное количество пар друзей, в которых один друг — рыцарь, а второй — лжец.

Ответы и комментарии

$\boxed{1}$ Попытаемся понять, кто кем был, а когда однозначно определить не получится (или получится не сразу), будем разбирать случаи.

Пусть первый — рыцарь. Тогда двое других — лжецы, и второй сказал правду, что среди его спутников ровно один рыцарь. Противоречие. Значит, **первый — лжец,** и среди двух других точно есть рыцарь. Если второй — рыцарь, то чтобы его ответ был правдивым, третий тоже должен быть рыцарем, и тогда он ответит «Один». Если же второй — лжец, то третий должен быть рыцарем (рыцарь точно есть, так как первый солгал), а с другой стороны, второй тогда сказал правду. Значит, этот случай невозможен.

Обратите внимание школьников на такое полезное, хотя и неформальное соображение. Если бы третий был лжецом, то как бы мы поняли, что он сказал? Наверняка он — рыцарь.

Ответ: один.

$\boxed{2}$ Ответ четвёртого анализировать бессмысленно — так может сказать любой. Ответы первых трёх островитян противоречат друг друга, значит, среди них точно два неправильных. Значит, второй точно лжец. Кроме того, первый тоже, очевидно, лжец (рыцарь не может сказать про всех, включая себя, что они лжецы). Если третий сказал правду, то четвёртый — рыцарь. Если же третий — лжец, то четвёртый тоже рыцарь, поскольку хотя бы один рыцарь должен быть (иначе бы первый сказал правду).

$\boxed{3}$ Попробуем понять, кто рыцарь. Очевидно, не третий. Но и не второй (ведь тогда первый тоже рыцарь). Значит, рыцарь — первый. Тогда третий — лжец и второй — шпион.

$\boxed{4}$ Ясно, что каждую из двух фраз сказали жители из одной группы (рыцари, лжецы), причём теоретически на острове могут все быть рыцарями или лжецами (по крайней мере, нельзя это исключать априори без анализа самих высказываний). Разберём два случая.

Случай 1. Первую фразу сказали рыцари. Тогда рыцарей чётное число и вторую фразу рыцари сказать не могли, ведь тогда все были бы рыцарями, в то время как вторая фраза означает, что есть хотя бы один лжец. Значит, вторую фразу сказали лжецы, поэтому их, как и рыцарей чётное число.

Случай 2. Первую фразу сказали лжецы. Значит, рыцарей нечётное число, в частности, есть хоть один рыцарь, поэтому вторую фразу не могли сказать снова лжецы, её сказали рыцари. Таким образом, рыцарей и лжецов нечётное число.

Итак, в двух случаях получается разная чётность числа рыцарей, но одна и та же чётность всех жителей.

Ответ: а) нет; **б)** да.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть есть x пар друзей РЛ (рыцарь и лжец). Все $2x$ жителей в этих парах назвали своего друга лжецом. Остаётся по $\dfrac{100-x}{2}$ пар друзей РР и ЛЛ, и все $2(100-x)$ жителей в этих парах назвали своего друга рыцарем. По условию $2x = 2(100-x) = 100$, откуда $x = 50$.

Листок 13. Вероятность

$\boxed{\mathbf{1}}$ Монету подбрасывают два раза. Какова вероятность выпадения **а)** двух орлов; **б)** орла и решки?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Бросают два игральных кубика. Какова вероятность: **а)** выпадения дубля; **б)** того, что сумма выпавших чисел не меньше 9; **в)** того, что сумма выпавших чисел равна 8, а разность — 4?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Из мешка с 2 белыми и 3 чёрными шарами не глядя достают 2 шара. Какова вероятность вынуть: **а)** два белых шара; **б)** два чёрных; **в)** белый и чёрный?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Десять учеников стоят перед экзаменом у дверей класса. Сначала на столе лежат 10 различных билетов. Каждый должет зайти и взять один из оставшихся. Миша не знает один из этих 10 билетов. Какова вероятность того, что именно этот билет ему попадётся, если Миша зайдёт **а)** первым; **б)** последним; **в)** шестым?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В ящике лежат четыре шара, каждый из которых белый или чёрный. Требуется угадать, сколько каких шаров в ящике. За одну попытку разрешается, не заглядывая в ящик, наугад вынуть два шара, посмотреть на них и положить обратно (после чего шары перемешиваются). Сделали 100 попыток, и в 50 из них вынимали два черных шара. Как Вы думаете, сколько каких шаров в ящике (скорее всего) и почему?

$\boxed{\mathbf{6}}$ В тесте 15 вопросов и в каждом 3 варианта ответа. Петя произвольно ответил на вопросы. Какова вероятность того, что **а)** он правильно решил весь тест; **б)** правильно решил только номера 6 и 10?

Ответы и комментарии

Сначала стоит рассказать детям основные понятия классической вероятности и объяснить. Возможно, первую задачу стоит разобрать и попросить детей подбросить пару монет раз двадцать, записав результаты эксперимента.

1 Может показаться, что обе вероятности равны 1/3, ведь всего три равноправных исхода: два орла, две решки, орёл и решка. Однако это не так. Представьте, что монеты бросаются с некоторым интервалом времени. Тогда мы можем записать, какой сторона упала *первая* монета и какой *вторая.* В итоге получится *четыре* варианта: ОО, ОР, РО, РР. Поэтому вероятность выпадения двух орлов равна 1/4, а выпадения орла и решки — 1/2. Если вы подбросите две монеты много раз, по подтвердите этот вывод опытном путём. Отметим, что ответ, конечно, не зависит, от того, бросали ли мы монеты с интервалом или одновременно. Можно их как-то пометить и бросать одновременно. Любые подобные действия не могут повлиять на ответ, зато помогают его лучше понять.

2 Как и в предыдущей задаче, кубики можно занумеровать. Тогда каждый исход — это пара чисел (a, b), каждое из которых принимает значения от 1 до 6. Всего $6^2 = 36$ возможных исходов.

а) Дублей всего 6. Значит, вероятность дубля $6/36 = 1/6$. Другое рассуждение: первый кубик может выпасть как угодно. Чтобы выпал дубль, кубик второй должен упасть той же цифрой, что и первый — вероятность 1/6.

б) Выпишем все пары, в которых сумма не меньше 9: $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, $(4, 5)$, $(4, 6)$, $(3, 6)$ — всего 10 пар. Значит, вероятность $10/36 = 5/18$.

в) Есть всего одна пара чисел с суммой 8 и разностью 4 — это 6 и 2 (система уравнений: $x + y = 6$, $x - y = 2$). Но у нас пары упорядоченные, поэтому подходят два варианта: $(6, 2)$ и $(2, 6)$, так что вероятность $2/36 = 1/18$.

3 Два шара из пяти можно выбрать $C_5^2 = 10$ способами. Среди этих выборок ровно одна подходит для пункта **а)**, $C_3^2 = 3$ выборки подходят для пункта **б)** и $2 \cdot 3$ — для пункта **в)**. Отсюда получаем вероятности.

Отметим, что сумма вероятностей в трёх пунктах, как и должно было быть, оказалась равна 1. Обратите на это внимание школьников, особенно, если они их ответы не удовлетворяют этому условию.

Ответ: а) $\dfrac{1}{10}$; **б)** $\dfrac{3}{10}$; **в)** $\dfrac{3}{5}$;

$\boxed{\mathbf{4}}$ Во всех случаях вероятность равна 1/10. Проще всего формально это можно объяснить так. Элементарным исходом будем считать список, в котором указано, кто какой билет получил. Всего 10! списков. Из них 9! тех, в которых у Миши тот билет, который он не знает. Вероятность его выбора равна $\dfrac{9!}{10!} = \dfrac{1}{10}$.

Психологически с этим не все могут согласиться, и кто-то может продолжать настаивать, что выгоднее брать последним или, наоборот, первым. Например, после того, как первый возьмёт билет, и он, скорее всего, не окажется несчастливым, у всех остальных повысится вероятность вытащить несчастливый билет — уже не 1/10, а 1/9. И так далее... выходит, чем позже берёшь, тем вероятнее получить несчастливый билет. Конечно, это не так, ведь уже на первом шаге мы сказали «он, *скорее всего,* не окажется несчастливым». Но всё же есть вероятность, что его возьмёт первый экзаменуемый, и тогда все остальные смогут вздохнуть с облегчением. Этти рассуждения легко формализзются с помощью понятия *условной верояности.* Вероятность второму вытащить несчастливый билет *при условии,* что его не вытащил первый, и впрямь равна 1/9. А вероятность, что первый его не вытащил, равна 9/10. Их произведение и даёт вероятность вытащить второму тот билет, которая все равно получается равной 1/10.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Очевидно, не все шары чёрные, так что чёрных либо 2, либо 3. Теоретически возможны оба варианта, однако, если бы чёрных шаров было 2, то вероятность выбора именно их была гораздо меньше половины. Для формального рассуждения и нахождения вероятностей удобно занумеровать шары: 1, 2, 3, 4 и считать событием неупорядоченную пару $\{a, b\}$, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ — номера выпавших шаров, причём $a \neq b$ (если школьники не особо знакомы с сочетаниями, возможно, проще считать пары упорядоченными и скорректировать наше решение). Всего неупорядоченных пар из четырёх элементов $C_4^2 = 6$. Значит, вероятность выбрать конкретную пару равна $1/6$. Значит, очень маловероятно, что было всего два чёрных шара — ведь тогда мы бы их выбирали примерно каждый шестой раз, а не каждый второй. А вот три чёрных шара соответствует вероятности $1/2$: в трёх случаях из шести мы выбираем три чёрных шара (если это шары с номерами $1, 2, 3$, то три хорошие выборки — это $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$.

Ответ: 3.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Здесь исход — это упорядоченный набор из 15 чисел, равных $1, 2$ или 3. Всего таких наборов $3^{15} (= 14348907)$.

а) Эта вероятность ничтожно мала: 3^{-15}.

б) Эта вероятность побольше, хотя тоже очень маленькая. Давайте поситаем, сколько всего бланков ответов удовлетворяют условию. На вопросы 6 и 10 ответы должны быть правильные, а на все остальные вопросы — неправильные, т. е. в 13 позициях из 15 возможен один из двух неправильных ответов. Итого 2^{13} бланков. Значит, вероятность равна $2^{13}/3^{15}$.

Листок 14. Вероятность-2

$\boxed{\mathbf{1}}$ В лифт пятиэтажного дома на первом этаже вошли трое. Каждый может выйти на любом этаже со второго по пятый равновероятно и независимо от других. Какова вероятность того, что все выйдут **а)** на четвёртом этаже; **б)** на одном этаже; **в)** на разных этажах; **г)** выше второго этажа?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 кубиков ($10 \times 10 \times 10$), которые затем перемешали. Чему равна вероятность того, что наудачу выбранный кубик имеет ровно одну окрашенную грань?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Десятитомное собрание сочинений стоит на полке в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый и второй тома стоят рядом?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Один бросил монету 10 раз, другой — 11. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Чему равна вероятность того, что хотя бы у двух школьников в классе из 23 человек дни рождения совпадают? **б)*** Сравните эту вероятность с $1/2$. (Високосными годами пренебречь.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ *Let's Make a Deal.* В некоторой игре ведущий предлагает играющему угадать, за какой из трёх закрытых дверей находится автомобиль. Игрок заранее знает, что за двумя другими дверями находятся козы. Он наугад выбирает одну из дверей. После этого ведущий (зная, где находится автомобиль) открывает одну из двух других дверей, за которой коза, причём игрок знает, что ведущий обязательно откроет дверь, за которой коза. Далее ведущий предлагает играющему две возможности: изменить своё решение и выбрать другую закрытую дверь, или же по-прежнему настаивать на первоначально выбранной двери. Как лучше поступить играющему?

Ответы и комментарии

$\boxed{\mathbf{1}}$ Исход в этой задаче — это упорядоченный набор из трёх чисел от 2 до 5. Всего таких наборов $4^3 = 64$, поэтому вероятность любого из них равна $1/64$.

а) В частности, такова вероятность набора $(4, 4, 4)$.

б) Вероятность того, что все числа в наборе равны, — в 4 раза больше (таких наборов в 4 раза больше) и равна $1/16$.

в) Наборов, в которых все числа различны, $4 \cdot 3 \cdot 2$, поэтому вероятность равна $\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \dfrac{3}{8}$.

г) Наборов, в которых нет двойки, ровно 3^3, поэтому вероятность равна $\dfrac{27}{64}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Надо просто посчитать число таких кубиков. На каждой грани их 8^2, а всего граней 6. Поэтому вероятность равна $\dfrac{8^2 \cdot 6}{10^3} = \dfrac{4^2 \cdot 3}{5^3}$.

Ответ: $\dfrac{48}{125}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Всего перестановок из десяти чисел $10!$. В скольких из них числа 1 и 2 стоят рядом? Перестановки, в которых сразу после 1 идёт 2 — это фактически перестановки 9 чисел: 12, $3, 4, \ldots, 10$ — их $9!$. Столько же перестановок, в которых сразу после 2 идёт 1. Значит, вероятность равна $\dfrac{2 \cdot 9!}{10!} = \dfrac{1}{5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{5}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Исходом является пара наборов длины 10 и 11, заполненных О и Р. Возьмём два таких набора. Пусть в первом x орлов и соответственно $10 - x$ решек, а во втором y решек и $11 - y$ орлов. Спрашивается, какова вероятность того, что $x < y$, или какова доля пар наборов, в которых $x < y$, среди всех пар наборов. Заметим, что если мы заменим в условии слово «орлы» на слово «решки», то ответ, очевидно, не изменится, т. е. количества пар наборов, в которых $x < y$ и в которых $10 - x < 11 - y$, одинаковы. В то же время, и это — ключевая идея,

$$10 - x < 11 - y \iff 10 - x \leqslant 10 - y \iff x \geqslant y.$$

Таким образом, события $x < y$ и $x \geqslant y$ равновероятны. Поскольку они взаимоисключающие и одно из них непременно имеет место, то вероятности обоих равны $1/2$.

Ответ: $1/2$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Элементарным событием является список дат рождения учащихся. По условию мы считаем, что в году 365 дней это надо пояснить школьникам, которые не поняли, что значит, високосными годами пренебречь. Тогда всего возможных списков 365^{23}. В скольких списках есть повторяющиеся даты? Гораздо проще посчитать списки, в которых все даты разные — их $365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 337$ $(343 = 365 - 23 + 1$ — 23-й по счёту множитель). Значит, искомая вероятность равна

$$\frac{365^{29} - 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}}.$$

С помощью калькулятора или, используя аналитические методы, можно оценить, что эта вероятность немного больше $1/2$ (равна $0{,}506\ldots$). А вот если бы учеников было 22, то вероятность была бы немного меньше $1/2$ $(0,475\ldots)$.

Вывод о сравнении вероятности с $1/2$ может показаться удивительным. В теории вероятностей это называется *парадоксом дней рождений* и имеет различные применения, например, к хеш-функциям.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Это очень известная задача, она называется *парадокс Монти Холла* по имени американского телеведущего игры «Let's Make a Deal» («Давай заключим сделку»). Парадокс в том, что интуитивное или основанное на «здравом смысле» рассуждение может привести к неправильному ответу: мы и так знаем, что ведущий откроет козу, так что неважно, будем мы менять решение или нет — вероятность выиграть автомобиль равна $1/2$. Однако это неверно! Как это ни парадоксально, но лучше именно сменить дверь, поскольку вероятность выигрыша при этом равна $2/3$, иначе соответственно $1/3$. Почему?

Представим себе, что дверей не 3, а 100, автомобиль только за одной из них, за остальными — козы, а ведущий открывает 998 дверей, не выбранных нами, оставляя две, за одной из которых точно автомобиль. Не хочется ли вам изменить решение? Ведь если мы его не изменим, то вероятность выигрыша останется $1/100$ (как будто после нашего выбора вообще ничего не происходило, а сразу открыли выбранную нами дверь). Это автоматически означает, что вероятность, что автомобиль за второй дверью $99/100$.

Порекомендуйте подробнее почитать об этой задаче и её вариациях.

Листок 15. Математический аукцион

Правила аукциона

1. Школьники делятся на (примерно) равные команды.

2. Аукцион состоит из раундов по 1-2 задачи в каждом. На раунд отводится 10-15 минут. По истечении времени команды сдают листки с ответами к задачам раунда. Менять (улучшать) эти ответы потом **нельзя**!

3. Как все сдали листки с ответами, по каждой задаче в отдельности (последовательно) начинаются торги за право выхода к доске — рассказать свой ответ. У команд есть начальный капитал в 100 у.е.

4. Всегда можно поставить установленную сумму — 15 у.е., даже если придётся уйти в минус.

5. Результат торгов — последовательность, в которой представители команд выходят к доске — определяется в порядке убывания заявленных цен.

6. Команда, поставившая больше всех, **обязана** выйти к доске, остальные — на своё усмотрение (выходить бессмысленно, если твой результат хуже рассказанного).

7. У каждой команды, вышедшей к доске, заявленная цена вычитается **автоматически**.

8. Команда, рассказавшая верное и не улучшенное никем решение, получает удвоенную свою сумму.

9. **ВА-БАНК.** Можно пойти ва-банк — поставить всё, что есть (при условии, что капитал не меньше фиксированной суммы, скажем, 10 у.е.). Ва-банк можно перебить только бóльшим ва-банком.

Задачи

$\boxed{\textbf{1}}$ Расставьте на шахматной доске как можно большее число ладей так, чтобы каждая била нечётное число других.

$\boxed{\textbf{2}}$ Найдите как можно большее натуральное число, в записи которого не встречается цифра 0, и которое делится на сумму своих цифр.

3 Придумайте натуральное число, делящееся на 14, с как можно меньшей суммой цифр.

4 Разрежьте квадрат 7×7 на как можно большее число различных прямоугольников по линиям сетки.

5 Из квадрата на рисунке можно вырезать прямоугольник, сумма чисел в котором равна n для любого n от 1 до 8, а с суммой 9 — нельзя. Расставьте натуральные числа в квадрате 3×3 так, чтобы можно было вырезать прямоугольники с любой суммой от 1 до N для как можно большего N.

6 Обезьяна хочет узнать, из окна какого самого низкого этажа 15-этажного дома нужно бросить кокосовый орех, чтобы он разбился. У неё есть 2 ореха. Какого наименьшего числа бросков ей заведомо хватит? (Возможно, и при падении с 15-го этажа орех не разбивается. Неразбившийся орех можно бросать
снова.)

7 По рецепту торт имеет вид квадрата 8×8 и содержит ровно 5 розочек (по одной в каких-то пяти клетках). По традиции Винни-Пуху разрешено отрезать любой прямоугольный кусок (с границами по линиям сетки), содержащий ровно одну розочку. Голодный Винни-Пух отрезает себе самый большой кусок из возможных (он может вырезать себе кусок хоть из центра торта, но обязан соблюдать традицию). Предусмотрительный Кролик хочет расставить розочки на торте так, чтобы Винни-Пух получил как можно меньший кусок. Помогите Кролику найти оптимальную расстановку розочек. Какой по площади кусок при этом достанется Винни-Пуху?

8 Фигура мамонт бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

9 Найдите как можно большее натуральное число, не оканчивающееся нулем, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Разместите на шахматной доске как можно меньше доминошек так, чтобы их нельзя было сдвинуть. (Сдвигать доминошки за край доски нельзя.)

$\boxed{\mathbf{11}}$ Разрежьте квадрат на 20 меньших квадратов так, чтобы среди них было как можно больше разных.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на любой горизонтали, вертикали и диагонали находилось четное число фишек?

$\boxed{\mathbf{13}}$ Отметьте на линейке как можно меньше делений так, чтобы ею можно было отмерить любое расстояние от 1 до 20.