Письменная работа

1 Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

2 В равнобедренном треугольнике один из углов равен 45°. Какой это треугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

3 В кинотеатре несколько рядов по 12 кресел. Первый ряд пронумерован от 1 до 12, второй от 13 до 24, и так далее. Номер сидения Васи равен номеру ряда Пети. Сумма номеров их сидений равна 123. Найдите номера сидений Васи и Пети.

4 Поля, Даша, Света и Юля были на математической олимпиаде. На вопрос «Кто из вас решил последнюю задачу?» они ответили так:

Поля: «Даша не решила задачу. Я тоже её не решила».

Даша: «Юля решила задачу. А вот Света — нет».

Света: «Да, задачу решила Юля. А вот я не смогла».

Юля: «Поля решила задачу. Света — тоже».

Кто мог решить задачу, если каждая девочка один раз сказала правду, а один раз ошиблась? Перечислите все возможные варианты.

5 В классе 25 человек. Может ли быть так, что 6 из них имеют ровно по 3 друга, 10 — ровно по 4 друга, а 9 — ровно по 5 друзей в этом классе?

6 Сколькими способами можно переставить буквы в слове МЕХМАТ так, чтобы между двумя гласными буквами стояли две согласные?

7 $ABCD$ — четырёхугольник, причём $AD||BC$. Точка M лежит на прямой BC, $AM \perp BD, AM$ — биссектриса угла BAD, $\angle BMA = \angle ABD$. Докажите, что $ABMD$ — квадрат.

8 Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?

9 Найдите НОД всех девятизначных чисел, полученных перестановкой цифр в числе 123456789 (включая и само это число).

Письменная работа

1 Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

2 В равнобедренном треугольнике один из углов равен 45°. Какой это треугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

3 В кинотеатре несколько рядов по 12 кресел. Первый ряд пронумерован от 1 до 12, второй от 13 до 24, и так далее. Номер сидения Васи равен номеру ряда Пети. Сумма номеров их сидений равна 123. Найдите номера сидений Васи и Пети.

4 Поля, Даша, Света и Юля были на математической олимпиаде. На вопрос «Кто из вас решил последнюю задачу?» они ответили так:

Поля: «Даша не решила задачу. Я тоже её не решила».

Даша: «Юля решила задачу. А вот Света — нет».

Света: «Да, задачу решила Юля. А вот я не смогла».

Юля: «Поля решила задачу. Света — тоже».

Кто мог решить задачу, если каждая девочка один раз сказала правду, а один раз ошиблась? Перечислите все возможные варианты.

5 В классе 25 человек. Может ли быть так, что 6 из них имеют ровно по 3 друга, 10 — ровно по 4 друга, а 9 — ровно по 5 друзей в этом классе?

6 Сколькими способами можно переставить буквы в слове МЕХМАТ так, чтобы между двумя гласными буквами стояли две согласные?

7 $ABCD$ — четырёхугольник, причём $AD||BC$. Точка M лежит на прямой BC, $AM \perp BD, AM$ — биссектриса угла BAD, $\angle BMA = \angle ABD$. Докажите, что $ABMD$ — квадрат.

8 Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?

9 Найдите НОД всех девятизначных чисел, полученных перестановкой цифр в числе 123456789 (включая и само это число).

Листок 1. Знакомство

1 Разрежьте квадрат 4×4 на две равные части четырьмя различными способами так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Способы, различающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.

2 Как из 15-литровой бочки отлить 8 л воды, имея две бочки вместимостью 5 л и 9 л? Переливать воду можно только в эти две бочки.

3 В записи $1*2*4*8*16*32*64=27$ замените знаки «$*$» знаками «$+$» и «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

4 Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове: **а)** МАЛЫЙ; **б)** МЕХМАТ?

5 **а)** 31 декабря 2011 года возраст Евгения Александровича совпадал с суммой цифр его года рождения. Сколько лет Евгению Александровичу было 31 декабря 2014 года? **б)** Докажите единственность ответа.

6 Четыре друга пришли с рыбалки. Каждые двое сосчитали сумму своих уловов. Получилось шесть чисел: 7, 9, 14, 14, 19, 21. **а)** Сколько всего рыб было поймано? **б)** Сможете ли вы узнать, каковы были уловы?

7 Гриб называется *плохим,* если в нём не меньше 10 червей. В лукошке 91 плохой гриб и 10 хороших. Могут ли все грибы в лукошке стать хорошими после того, как некоторые червяки переползут в другие грибы?

8 На доске 8×8 на первой горизонтали стоят 8 белых фишек, а на последней — 8 чёрных фишек. Первыми ходят белые. За один ход можно передвинуть любую свою фишку на любое число клеток вперёд или назад по вертикали. Запрещается ходить на занятые поля, перепрыгивать через фишки соперника и пропускать ходы. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

9 На кружке каждая девочка знакома с 5 девочками и 6 мальчиками, а каждый мальчик — с 7 девочками и с 4 мальчиками. Какое наименьшее количество школьников может быть на кружке?

10 Клетчатый квадрат 2013×2013 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Листок 1. Знакомство

1 Разрежьте квадрат 4×4 на две равные части четырьмя различными способами так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Способы, различающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.

2 Как из 15-литровой бочки отлить 8 л воды, имея две бочки вместимостью 5 л и 9 л? Переливать воду можно только в эти две бочки.

3 В записи $1*2*4*8*16*32*64=27$ замените знаки «$*$» знаками «$+$» и «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

4 Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове: **а)** МАЛЫЙ; **б)** МЕХМАТ?

5 **а)** 31 декабря 2011 года возраст Евгения Александровича совпадал с суммой цифр его года рождения. Сколько лет Евгению Александровичу было 31 декабря 2014 года? **б)** Докажите единственность ответа.

6 Четыре друга пришли с рыбалки. Каждые двое сосчитали сумму своих уловов. Получилось шесть чисел: 7, 9, 14, 14, 19, 21. **а)** Сколько всего рыб было поймано? **б)** Сможете ли вы узнать, каковы были уловы?

7 Гриб называется *плохим,* если в нём не меньше 10 червей. В лукошке 91 плохой гриб и 10 хороших. Могут ли все грибы в лукошке стать хорошими после того, как некоторые червяки переползут в другие грибы?

8 На доске 8×8 на первой горизонтали стоят 8 белых фишек, а на последней — 8 чёрных фишек. Первыми ходят белые. За один ход можно передвинуть любую свою фишку на любое число клеток вперёд или назад по вертикали. Запрещается ходить на занятые поля, перепрыгивать через фишки соперника и пропускать ходы. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

9 На кружке каждая девочка знакома с 5 девочками и 6 мальчиками, а каждый мальчик — с 7 девочками и с 4 мальчиками. Какое наименьшее количество школьников может быть на кружке?

10 Клетчатый квадрат 2013×2013 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Листок 2. Доказательства от противного и принцип Дирихле

Теорема 1 (принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить хотя бы $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит больше одного кролика.*

Теорема 2 (обобщенный принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить более $k \cdot n$ кроликов, то найдется клетка, где сидит больше k кроликов.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы.
б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На 25 страницах книги 102 опечатки. Докажите, что на одной из них не менее 5 опечаток.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В мешке лежат 4 красных и 2 синих шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить не глядя, чтобы среди них точно были такие шары: **а)** 1 красный; **б)** 1 синий; **в)** 1 красный и 1 синий; **г)** два одноцветных?

$\boxed{\mathbf{4}}$ У человека на голове не более 1 000 000 волос, а в Москве более 8 000 000 жителей. Докажите, что найдутся 8 москвичей с одинаковым числом волос.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В школе 65 восьмиклассников, и все они сдают по три экзамена, за каждый из которых можно получить оценку 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все экзамены?

$\boxed{\mathbf{6}}$ 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, и на этих остановках новые пассажиры не заходят. Докажите, что на каких-то двух остановках выйдет одинаковое число пассажиров (может быть, ни одного).

$\boxed{\mathbf{7}}$ За 5 лет обучения в университете студент сдал 31 экзамен, причём на каждом курсе он сдавал экзаменов больше, чем на предыдущем. На V курсе экзаменов было втрое больше, чем на I курсе. А сколько экзаменов было на IV курсе?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Дано 7 отрезков с длинами от $\frac{1}{10}$ до 1. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Никита разрезал лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков, потом — один из трех получившихся кусков, и т. д. Докажите, что через несколько разрезаний среди полученных многоугольников найдется 100 штук с одинаковым числом вершин.

Листок 2. Доказательства от противного и принцип Дирихле

Теорема 1 (принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить хотя бы $n+1$ кроликов, то найдется клетка, в которой сидит больше одного кролика.*

Теорема 2 (обобщенный принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить более $k \cdot n$ кроликов, то найдется клетка, где сидит больше k кроликов.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы.
б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На 25 страницах книги 102 опечатки. Докажите, что на одной из них не менее 5 опечаток.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В мешке лежат 4 красных и 2 синих шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить не глядя, чтобы среди них точно были такие шары: **а)** 1 красный; **б)** 1 синий; **в)** 1 красный и 1 синий; **г)** два одноцветных?

$\boxed{\mathbf{4}}$ У человека на голове не более 1 000 000 волос, а в Москве более 8 000 000 жителей. Докажите, что найдутся 8 москвичей с одинаковым числом волос.

$\boxed{\mathbf{5}}$ В школе 65 восьмиклассников, и все они сдают по три экзамена, за каждый из которых можно получить оценку 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все экзамены?

$\boxed{\mathbf{6}}$ 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, и на этих остановках новые пассажиры не заходят. Докажите, что на каких-то двух остановках выйдет одинаковое число пассажиров (может быть, ни одного).

$\boxed{\mathbf{7}}$ За 5 лет обучения в университете студент сдал 31 экзамен, причём на каждом курсе он сдавал экзаменов больше, чем на предыдущем. На V курсе экзаменов было втрое больше, чем на I курсе. А сколько экзаменов было на IV курсе?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Дано 7 отрезков с длинами от $\frac{1}{10}$ до 1. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Никита разрезал лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков, потом — один из трех получившихся кусков, и т. д. Докажите, что через несколько разрезаний среди полученных многоугольников найдется 100 штук с одинаковым числом вершин.

Листок 3. Примеры и контрпримеры

Контпример к утверждению *— это пример, который показывает, что это утверждение неверно.*

1 Можно ли расположить 12 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно: **а)** по 2 монеты; **б)** по 3 монеты; **в)** по 4 монеты; **г)** по 5 монет; **д)** по 6 монет; **е)** по 7 монет? Монеты можно класть друг на друга.

2 Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений.
а) Все четырёхугольники, у которых все стороны равны, — квадраты.
б) Через любые три точки плоскости можно провести прямую.
в) Через любые три точки плоскости можно провести окружность.
г) Все простые числа — нечётные.
д) Если число делится на 2 и на 6, то оно делится и на 12.
е) Если число a делится на 15 и на b, то оно делится и на $15b$.

3 Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

4 Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого прямоугольника можно вырезать второй. Прав ли он?

5 Известно, что $a = b + 1$. Может ли оказаться, что $a^4 = b^4$?

6 Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \ldots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (такие числа называют *палиндромами*). Не хвастает ли барон?
Подсказка: подумайте, при каком наименьшем N такое возможно.

7 Рома сформулировал теорему: *если число $88a$ делится на число b, то и число a делится на число b.*
а) Найдите хотя бы один контрпример к этой теореме (то есть число b, для которого утверждение теоремы выполняется не при всех a).
б) При каких b утверждение теоремы верно, а при каких неверно?
в) При подстановке каких чисел вместо 88 все контрпримеры останутся контрпримерами?

Листок 3. Примеры и контрпримеры

Контпример к утверждению *— это пример, который показывает, что это утверждение неверно.*

1 Можно ли расположить 12 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно: **а)** по 2 монеты; **б)** по 3 монеты; **в)** по 4 монеты; **г)** по 5 монет; **д)** по 6 монет; **е)** по 7 монет? Монеты можно класть друг на друга.

2 Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений.
а) Все четырёхугольники, у которых все стороны равны, — квадраты.
б) Через любые три точки плоскости можно провести прямую.
в) Через любые три точки плоскости можно провести окружность.
г) Все простые числа — нечётные.
д) Если число делится на 2 и на 6, то оно делится и на 12.
е) Если число a делится на 15 и на b, то оно делится и на $15b$.

3 Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

4 Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого прямоугольника можно вырезать второй. Прав ли он?

5 Известно, что $a = b + 1$. Может ли оказаться, что $a^4 = b^4$?

6 Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \ldots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (такие числа называют *палиндромами*). Не хвастает ли барон?
Подсказка: подумайте, при каком наименьшем N такое возможно.

7 Рома сформулировал теорему: *если число $88a$ делится на число b, то и число a делится на число b.*
а) Найдите хотя бы один контрпример к этой теореме (то есть число b, для которого утверждение теоремы выполняется не при всех a).
б) При каких b утверждение теоремы верно, а при каких неверно?
в) При подстановке каких чисел вместо 88 все контрпримеры останутся контрпримерами?

Листок 4. Инварианты

Инвариант *— это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях.*

В каждой задаче этого занятия нужно найти инвариант. Например: чётность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Лягушка прыгает вдоль прямой: **а)** на 1 см вправо или влево; **б)** сначала на 1 см вправо, затем на 3 см вправо или влево, затем на 5 см вправо или влево, и т. д. Может ли она оказаться в исходной точке после своего 101-го прыжка?

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля A1 на поле A8? **б)** Тот же вопрос для шахматного коня.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число **а)** $a+b$; **б)** ab; **в)** $a+b-2$. Какое число получится после 20 таких действий? **г)** Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями? **д)** Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 23.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?
б) На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.
б) На шахматной доске 5×5 расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?

Листок 4. Инварианты

Инвариант *— это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях.*

В каждой задаче этого занятия нужно найти инвариант. Например: чётность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Лягушка прыгает вдоль прямой: **а)** на 1 см вправо или влево; **б)** сначала на 1 см вправо, затем на 3 см вправо или влево, затем на 5 см вправо или влево, и т. д. Может ли она оказаться в исходной точке после своего 101-го прыжка?

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля A1 на поле A8? **б)** Тот же вопрос для шахматного коня.

$\boxed{\mathbf{3}}$ На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число **а)** $a+b$; **б)** ab; **в)** $a+b-2$. Какое число получится после 20 таких действий? **г)** Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями? **д)** Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 23.

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?
б) На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

$\boxed{\mathbf{5}}$ В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.
б) На шахматной доске 5×5 расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?

7 **а)** В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что ровно 19 из них делятся на 3? **б)** Петя ввёл в компьютер число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

8 По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Подсказка: *рассмотрите диаметрально противоположные числа.*

9 В колбу поместили 133 бактерии типа A, 135 бактерий типа B и 137 бактерий типа C. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа?

Подсказка: *подумайте про остатки от деления на 3.*

7 **а)** В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что ровно 19 из них делятся на 3? **б)** Петя ввёл в компьютер число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

8 По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Подсказка: *рассмотрите диаметрально противоположные числа.*

9 В колбу поместили 133 бактерии типа A, 135 бактерий типа B и 137 бактерий типа C. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа?

Подсказка: *подумайте про остатки от деления на 3.*

Листок 5. Остатки

1 Найдите все натуральные числа, при делении которых на 8 в частном получается то же число, что и в остатке.

2 **а)** Число делится на 44 с остатком 15. С каким остатком оно делится на 11? **б)** Число делится на 7 с остатком 5. Какой остаток оно может давать при делении на 35? Найдите все возможные варианты.

3 Докажите, что произведение пяти подряд идущих натуральных чисел, даже если оно начинается не с единицы, делится **а)** на 30; **б)** на 120.

4 Найдите остаток от деления числа $1! + 2! + 3! + \ldots + 15!$ на 15.

5 Составьте таблицу умножения остатков от деления на **а)** 3, **б)** 5, **в)** 7. То есть таблица должна показывать, какой остаток от деления даст произведение двух чисел, если известны остатки множителей от деления.

6 Найдите последнюю цифру числа **а)** 7^7; **б)** 7^{7^7}; **в)** $7^{7^{7^7}}$.

7 Докажите, что при любом натуральном n **а)** число $n^5 + 4n$ делится на 5; **б)** $n^2 + 1$ не делится на 3; **в)** $n^3 + 2$ не делится на 9.

8 **а)** Число не делится на 4. Какие остатки от деления на 4 может давать его квадрат? Найдите все возможные варианты. **б)** Может ли являться точным квадратом сумма квадратов двух или трёх нечётных чисел?

9 Урюпинская Городская Дума переехала в новое здание. Если в новом зале для заседаний сажать депутатов по трое за стол, то один депутат окажется лишним. Если сажать по четверо за стол, то двое окажутся лишними. Если сажать по пять за стол, то трое окажутся лишними. В старом же здании депутаты сидели по семь за столом, и лишних не осталось. Какое наименьшее число депутатов может быть в Урюпинской Городской Думе?

10 Приведите пример: **а)** пяти; **б)** десяти; **в)** 2013 подряд идущих составных чисел.

11 **а)** Существует ли точный квадрат (то есть квадрат некоторого натурального числа) более 9000, в записи которого нет цифр, отличных от единицы, пятёрки и девятки? **б)** Существует ли точный квадрат, в записи которого 100 нулей, 101 единица, 102 двойки и более никаких других цифр?

Листок 5. Остатки

1 Найдите все натуральные числа, при делении которых на 8 в частном получается то же число, что и в остатке.

2 **а)** Число делится на 44 с остатком 15. С каким остатком оно делится на 11? **б)** Число делится на 7 с остатком 5. Какой остаток оно может давать при делении на 35? Найдите все возможные варианты.

3 Докажите, что произведение пяти подряд идущих натуральных чисел, даже если оно начинается не с единицы, делится **а)** на 30; **б)** на 120.

4 Найдите остаток от деления числа $1! + 2! + 3! + \ldots + 15!$ на 15.

5 Составьте таблицу умножения остатков от деления на **а)** 3, **б)** 5, **в)** 7. То есть таблица должна показывать, какой остаток от деления даст произведение двух чисел, если известны остатки множителей от деления.

6 Найдите последнюю цифру числа **а)** 7^7; **б)** 7^{7^7}; **в)** $7^{7^{7^7}}$.

7 Докажите, что при любом натуральном n **а)** число $n^5 + 4n$ делится на 5; **б)** $n^2 + 1$ не делится на 3; **в)** $n^3 + 2$ не делится на 9.

8 **а)** Число не делится на 4. Какие остатки от деления на 4 может давать его квадрат? Найдите все возможные варианты. **б)** Может ли являться точным квадратом сумма квадратов двух или трёх нечётных чисел?

9 Урюпинская Городская Дума переехала в новое здание. Если в новом зале для заседаний сажать депутатов по трое за стол, то один депутат окажется лишним. Если сажать по четверо за стол, то двое окажутся лишними. Если сажать по пять за стол, то трое окажутся лишними. В старом же здании депутаты сидели по семь за столом, и лишних не осталось. Какое наименьшее число депутатов может быть в Урюпинской Городской Думе?

10 Приведите пример: **а)** пяти; **б)** десяти; **в)** 2013 подряд идущих составных чисел.

11 **а)** Существует ли точный квадрат (то есть квадрат некоторого натурального числа) более 9000, в записи которого нет цифр, отличных от единицы, пятёрки и девятки? **б)** Существует ли точный квадрат, в записи которого 100 нулей, 101 единица, 102 двойки и более никаких других цифр?

Листок 6. Графы-1: ГеоГРАФия

Граф — это набор **вершин**, некоторые из которых соединены **рёбрами**.
Простой граф — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами.
Степень вершины — количество рёбер, выходящих из данной вершины.
Компонента связности графа — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**.

1 В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если сумма цифр-названий этих городов, делится на 4. Можно ли добраться из города 2 в город 8?

3 В Исландии 24 города. Сколько в ней дорог, если **а)** из каждого города выходит 5 дорог; **б)** каждый город связан дорогой с каждым?

4 На Кубе из каждого города выходит по 5 дорог и всего дорог 140. Сколько на Кубе городов?

5 Есть 7 марсиан, у каждого из которых: **а)** по одной руконожке; **б)** по три руконожки. Могут ли они взяться за руконожки так, чтобы свободных руконожек не было?

6 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 5 дорог, быть ровно 2013 дорог?

7 Петя утверждает, что каждый учащийся его класса имеет разное число друзей в классе. Если известно, что в его классе больше одного человека, то может ли Петя быть прав?

8 В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше — синих или зеленых?

9 Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

Листок 6. Графы-1: ГеоГРАФия

Граф — это набор **вершин**, некоторые из которых соединены **рёбрами**.
Простой граф — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами.
Степень вершины — количество рёбер, выходящих из данной вершины.
Компонента связности графа — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**.

1 В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

2 В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если сумма цифр-названий этих городов, делится на 4. Можно ли добраться из города 2 в город 8?

3 В Исландии 24 города. Сколько в ней дорог, если **а)** из каждого города выходит 5 дорог; **б)** каждый город связан дорогой с каждым?

4 На Кубе из каждого города выходит по 5 дорог и всего дорог 140. Сколько на Кубе городов?

5 Есть 7 марсиан, у каждого из которых: **а)** по одной руконожке; **б)** по три руконожки. Могут ли они взяться за руконожки так, чтобы свободных руконожек не было?

6 Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 5 дорог, быть ровно 2013 дорог?

7 Петя утверждает, что каждый учащийся его класса имеет разное число друзей в классе. Если известно, что в его классе больше одного человека, то может ли Петя быть прав?

8 В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше — синих или зеленых?

9 Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

Листок 7. Графы-2: лемма о рукопожатиях

Граф — это набор **вершин**, некоторые из которых соединены **рёбрами**. *Простой граф* — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами.
Степень вершины — количество рёбер, выходящих из данной вершины.
Компонента связности графа — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**. **Лемма о рукопожатиях.** Количество людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечётное число рукопожатий - чётно. (Количество вершин нечётной степени в графе — чётно.)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколько всего ребер в графе, степени вершин которого равны 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Существуют ли графы со степенями вершин: **а)** 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1; **б)** 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1; **в)** 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1; **г)** 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2; **д)** 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0?

Если да — постройте, если нет — докажите, почему.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли случиться, что каждый получил ровно по 3 письма?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Доказать, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

$\boxed{\mathbf{6}}$ При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n+1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики —- с одним и тем же числом девочек?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В некотором городе на любом перекрёстке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

Листок 7. Графы-2: лемма о рукопожатиях

Граф — это набор **вершин**, некоторые из которых соединены **рёбрами**. *Простой граф* — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами.
Степень вершины — количество рёбер, выходящих из данной вершины.
Компонента связности графа — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**. **Лемма о рукопожатиях.** Количество людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечётное число рукопожатий - чётно. (Количество вершин нечётной степени в графе — чётно.)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколько всего ребер в графе, степени вершин которого равны 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Существуют ли графы со степенями вершин: **а)** 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1; **б)** 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1; **в)** 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1; **г)** 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2; **д)** 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0?

Если да — постройте, если нет — докажите, почему.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли случиться, что каждый получил ровно по 3 письма?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Доказать, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

$\boxed{\mathbf{6}}$ При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n+1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики —- с одним и тем же числом девочек?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В некотором городе на любом перекрёстке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

Листок 8. Просто о простых

Определение. *Простое число* — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело только на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными.* Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 1. *Чтобы проверить, является ли натуральное число n составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$. (По определению $\sqrt{n}$ — это такое неотрицательное число, что $(\sqrt{n})^2 = n$.)*

Теорема 2 (основная теорема арифметики)**.** *Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.*

1 Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817? Составные числа разложите на простые множители.

2 Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.

3 **а)** Может ли число 2^n оканчиваться нулём при каком-нибудь натуральном n? **б)** Может ли квадрат натурального числа оканчиваться ровно пятью нулями?

4 Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: **а)** 1533; **б)** 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.

5 Сколько различных делителей у числа: **а)** 81; **б)** 36; **в)** $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$; **г)** $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r — различные простые числа, a, b, c — натуральные)?

6 Приведите пример целого числа, у которого ровно 2014 делителей.

7 Число $2n$ имеет ровно 15 различных натуральных делителей. Сколько различных натуральных делителей может иметь число n?

8 Сколько существует различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 55?

9 Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.

10 Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: **а)** 112? **б)** 175830?

11 Вычеркните из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 100!$ один из факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.

Листок 8. Просто о простых

Определение. *Простое число* — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело только на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными.* Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 1. *Чтобы проверить, является ли натуральное число n составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$. (По определению $\sqrt{n}$ — это такое неотрицательное число, что $(\sqrt{n})^2 = n$.)*

Теорема 2 (основная теорема арифметики)**.** *Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.*

1 Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817? Составные числа разложите на простые множители.

2 Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.

3 **а)** Может ли число 2^n оканчиваться нулём при каком-нибудь натуральном n? **б)** Может ли квадрат натурального числа оканчиваться ровно пятью нулями?

4 Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: **а)** 1533; **б)** 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.

5 Сколько различных делителей у числа: **а)** 81; **б)** 36; **в)** $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$; **г)** $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r — различные простые числа, a, b, c — натуральные)?

6 Приведите пример целого числа, у которого ровно 2014 делителей.

7 Число $2n$ имеет ровно 15 различных натуральных делителей. Сколько различных натуральных делителей может иметь число n?

8 Сколько существует различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 55?

9 Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.

10 Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: **а)** 112? **б)** 175830?

11 Вычеркните из произведения $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 99!\cdot 100!$ один из факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.

Листок 9. НОД и НОК

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \vdots c$, $b \vdots c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* — это наименьшее натуральное число c со свойством $c \vdots a$, $c \vdots b$. Обозначается НОК(a, b) или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Теорема 1. *Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geqslant 0$, $n_i \geqslant 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам:*

$$\begin{aligned} \textit{НОД}(a, b) &= p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k, n_k\}}, \\ \textit{НОК}(a, b) &= p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k, n_k\}}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство*

$$\textit{НОД}(a, b) \cdot \textit{НОК}(a, b) = a \cdot b.$$

$\boxed{1}$ Вычислите (без калькулятора!): **а)** $(8,\ 64)$ и $[8,\ 64]$; **б)** $(36,\ 60)$ и $[36,\ 60]$; **в)** $(125,\ 1\,534\,569)$ и $[54,\ 163]$; **г)** $(2^3{\cdot}3^{15}{\cdot}7^{19},\ 2^{31}{\cdot}3^2{\cdot}11^3)$ и $[2^3{\cdot}3^2{\cdot}5^2,\ 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5^3]$.

$\boxed{2}$ Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором — $\frac{2}{3}$ объёма, а в третьем — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

$\boxed{3}$ Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет. **а)** Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц? **б)** А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

$\boxed{4}$ **а)** Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b. **б)** Пусть a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

Листок 9. НОД и НОК

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \vdots c$, $b \vdots c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* — это наименьшее натуральное число c со свойством $c \vdots a$, $c \vdots b$. Обозначается НОК(a, b) или $[a, b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Теорема 1. *Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geqslant 0$, $n_i \geqslant 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам:*

$$\begin{aligned} \textit{НОД}(a, b) &= p_1^{\min\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k, n_k\}}, \\ \textit{НОК}(a, b) &= p_1^{\max\{m_1, n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k, n_k\}}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство*

$$\textit{НОД}(a, b) \cdot \textit{НОК}(a, b) = a \cdot b.$$

$\boxed{1}$ Вычислите (без калькулятора!): **а)** $(8,\ 64)$ и $[8,\ 64]$; **б)** $(36,\ 60)$ и $[36,\ 60]$; **в)** $(125,\ 1\,534\,569)$ и $[54,\ 163]$; **г)** $(2^3{\cdot}3^{15}{\cdot}7^{19},\ 2^{31}{\cdot}3^2{\cdot}11^3)$ и $[2^3{\cdot}3^2{\cdot}5^2,\ 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5^3]$.

$\boxed{2}$ Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором — $\frac{2}{3}$ объёма, а в третьем — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

$\boxed{3}$ Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет. **а)** Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц? **б)** А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

$\boxed{4}$ **а)** Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b. **б)** Пусть a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Объясните, почему в теореме 1 можно считать, что числа a и b имеют один и тот же набор простых множителей $p_1, \ldots, p_k$. (Обратите внимание, что некоторые m_i и n_i могут быть равны нулю!) **б)** Докажите теорему 1. **в)** С помощью теоремы 1 докажите теорему 2. **г)** Когда $\text{НОК}(a, b) = ab$?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно $2\,000$?

$\boxed{\mathbf{5}}$ **а)** Объясните, почему в теореме 1 можно считать, что числа a и b имеют один и тот же набор простых множителей $p_1, \ldots, p_k$. (Обратите внимание, что некоторые m_i и n_i могут быть равны нулю!) **б)** Докажите теорему 1. **в)** С помощью теоремы 1 докажите теорему 2. **г)** Когда $\text{НОК}(a, b) = ab$?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно $2\,000$?

Листок 10. Алгоритм Евклида

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел* a *и* b — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \,\vdots\, c$, $b \,\vdots\, c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.
Целые числа a и b называются *взаимно простыми,* если

$$\text{НОД}(a, b) = 1.$$

Во всех задачах этого занятия латинскими буквами обозначаются целые числа (и даже натуральные, если не оговаривается иное).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть $a \geqslant b$. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (шаг алгоритма Евклида) Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r).$$

Алгоритм Евклида. Для вычисления НОД(a, b) начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары (*делимое, делитель*) к паре (*делитель, остаток*) оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, где $d =$ НОД(a, b).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Не раскладывая числа на простые множители, вычислите:
а) НОД(861, 637); **б)** НОД(2014, 7813); **в)** НОД(121, 759).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сократите дробь $\dfrac{5840383}{34173679}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите: **а)** НОД$(n,\ n + 1)$; **б)** НОД$(2n,\ 2n + 2)$;
в) НОД$(3n,\ 6n + 3)$; **г)** НОД$(2n + 13,\ n + 7)$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
а) $a = 1001,\ b = 759$; **б)** $a = 7n + 3,\ b = 11n + 5$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Возьмём прямоугольник $m \times n$ клеточек и будем раз за разом отрезать по клеточкам от него квадрат с максимально возможной стороной. В итоге получится квадрат. С какой стороной?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Найдите:
а) НОД$(10^7 - 1,\ 10^5 - 1)$; **б)** НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m},\ \underbrace{11\ldots1}_{n})$; **в)** НОД$(a^m - 1,\ a^n - 1)$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что НОД$(5a + 3b,\ 13a + 8b) =$ НОД(a, b).

Листок 10. Алгоритм Евклида

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел* a *и* b — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \,\vdots\, c$, $b \,\vdots\, c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.
Целые числа a и b называются *взаимно простыми,* если

$$\text{НОД}(a, b) = 1.$$

Во всех задачах этого занятия латинскими буквами обозначаются целые числа (и даже натуральные, если не оговаривается иное).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть $a \geqslant b$. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ (шаг алгоритма Евклида) Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$. Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r).$$

Алгоритм Евклида. Для вычисления НОД(a, b) начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары (*делимое, делитель*) к паре (*делитель, остаток*) оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, где $d =$ НОД(a, b).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Не раскладывая числа на простые множители, вычислите:
а) НОД(861, 637); **б)** НОД(2014, 7813); **в)** НОД(121, 759).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сократите дробь $\dfrac{5840383}{34173679}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите: **а)** НОД$(n,\ n + 1)$; **б)** НОД$(2n,\ 2n + 2)$;
в) НОД$(3n,\ 6n + 3)$; **г)** НОД$(2n + 13,\ n + 7)$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
а) $a = 1001,\ b = 759$; **б)** $a = 7n + 3,\ b = 11n + 5$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Возьмём прямоугольник $m \times n$ клеточек и будем раз за разом отрезать по клеточкам от него квадрат с максимально возможной стороной. В итоге получится квадрат. С какой стороной?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Найдите:
а) НОД$(10^7 - 1,\ 10^5 - 1)$; **б)** НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m},\ \underbrace{11\ldots1}_{n})$; **в)** НОД$(a^m - 1,\ a^n - 1)$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что НОД$(5a + 3b,\ 13a + 8b) =$ НОД(a, b).

Листок 11. Математические игры-1: явные стратегии

В приведённых ниже задачах описаны правила различных игр. Требуется указать выигрышную стратегию для одного из игроков. ***Стратегия*** *— это набор правил, по которым игрок должен делать свои ходы в зависимости от предыдущих ходов противника и текущей позиции. Для игрока, делающего первый ход, стратегия должна включать в себя и выбор первого хода.*

Игры-шутки (исход игры не зависит от ходов противников)

$\boxed{\textbf{1}}$ В строчку выписано 100 единиц. Кирилл и Даниил по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Кирилл, в противном случае — Даниил. Кто выиграет, если начинает Кирилл?

$\boxed{\textbf{2}}$ На доске написано 10 единиц и 10 двоек. Двое играют по следующим правилам: за ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выиграет?

$\boxed{\textbf{3}}$ Маша и Ваня по очереди ломают шоколадку «Алёнка» размером 6×8. За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если первый разлом делает Маша?

Симметричные стратегии

$\boxed{\textbf{4}}$ Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?

$\boxed{\textbf{5}}$ Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

$\boxed{\textbf{6}}$ Имеются две кучки: в одной 20, в другой 30 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Листок 11. Математические игры-1: явные стратегии

В приведённых ниже задачах описаны правила различных игр. Требуется указать выигрышную стратегию для одного из игроков. ***Стратегия*** *— это набор правил, по которым игрок должен делать свои ходы в зависимости от предыдущих ходов противника и текущей позиции. Для игрока, делающего первый ход, стратегия должна включать в себя и выбор первого хода.*

Игры-шутки (исход игры не зависит от ходов противников)

$\boxed{\textbf{1}}$ В строчку выписано 100 единиц. Кирилл и Даниил по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Кирилл, в противном случае — Даниил. Кто выиграет, если начинает Кирилл?

$\boxed{\textbf{2}}$ На доске написано 10 единиц и 10 двоек. Двое играют по следующим правилам: за ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выиграет?

$\boxed{\textbf{3}}$ Маша и Ваня по очереди ломают шоколадку «Алёнка» размером 6×8. За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если первый разлом делает Маша?

Симметричные стратегии

$\boxed{\textbf{4}}$ Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?

$\boxed{\textbf{5}}$ Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

$\boxed{\textbf{6}}$ Имеются две кучки: в одной 20, в другой 30 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

7 В каждой клетке доски 7×7 стоит шашка. Двое по очереди снимают с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Укажите выигрышную стратегию для первого игрока.

Дополнение ходов соперника

8 В куче лежит 50 камней. Двое по очереди добавляют в нее от 1 до 9 камней. Выигрывает тот, кто доведет число камней до 200. Кто это будет — первый или второй?

9 Преподаватели Аня и Таня поедают 40 школьников. За ход разрешается съесть двоих, троих или четверых школьников. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет в поедании школьников, если начинает Аня?

10 *Игра «Баше».* **а)** Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 10 клеток. В крайней правой её клетке стоит шашка. Двое играющих по очереди передвигают ее влево на одну или две клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

б) Кто выигрывает в игре «Баше», если длина полоски составляет 11 клеток? 12 клеток? 13 клеток? 2000 клеток?

в) Изменим правила игры «Баше»: теперь за один ход можно сдвигать шашку на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток, а длина полоски — 13 клеток.

г) А теперь в игре «Баше» можно сдвигать шашку на 3, 6, 9 или 12 клеток, а длина полоски — 40 клеток.

7 В каждой клетке доски 7×7 стоит шашка. Двое по очереди снимают с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Укажите выигрышную стратегию для первого игрока.

Дополнение ходов соперника

8 В куче лежит 50 камней. Двое по очереди добавляют в нее от 1 до 9 камней. Выигрывает тот, кто доведет число камней до 200. Кто это будет — первый или второй?

9 Преподаватели Аня и Таня поедают 40 школьников. За ход разрешается съесть двоих, троих или четверых школьников. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет в поедании школьников, если начинает Аня?

10 *Игра «Баше».* **а)** Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 10 клеток. В крайней правой её клетке стоит шашка. Двое играющих по очереди передвигают ее влево на одну или две клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

б) Кто выигрывает в игре «Баше», если длина полоски составляет 11 клеток? 12 клеток? 13 клеток? 2000 клеток?

в) Изменим правила игры «Баше»: теперь за один ход можно сдвигать шашку на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток, а длина полоски — 13 клеток.

г) А теперь в игре «Баше» можно сдвигать шашку на 3, 6, 9 или 12 клеток, а длина полоски — 40 клеток.

Листок 12. Математические игры-2: анализ позиций

*Позиция называется **выигрышной**, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем обеспечить себе выигрыш. В противном случае позиция называется **проигрышной**.*
Выигрышные и проигрышные позиции расставляются с конца по следующим правилам:

- *позиция, из которой нельзя сделать ход — проигрышная;*
- *если из позиции X **можно** попасть в проигрышную позицию, то позиция X — выигрышная;*
- *если **все** ходы из позиции X ведут в выигрышные позиции, то позиция X — проигрышная.*

Победу может обеспечить себе первый игрок, если начальная позиция — выигрышная, и второй, если она проигрышная. Выигрышная стратегия — ходить на проигрышные позиции.
В описанных ниже играх требуется предъявить выигрышную стратегию для одного из игроков.

$\boxed{1}$ **а)** В левом нижнем углу доски 7×7 стоит *хромой король*, который за один ход может сдвинуться или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Игроки ходят по очереди, Кто не может сделать ход — проиграл. **б)** А теперь хромой король может ходить ещё и на одну клетку вверх.

$\boxed{2}$ На доске 11×15 в левом нижнем углу стоит *хромой конь*. Двое ходят по очереди. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или на две клетки вверх и на одну вправо. Кто не может сделать ход — проиграл.

$\boxed{3}$ Двое игроков ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперед. В начале игры стрелка показывает полдень. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. (Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем указать на 11 часов.)

$\boxed{4}$ **а)** Игра начинается с числа 4. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 2013. Тот же вопрос, если для выигрыша нужно получить число: **б)** $2^{2013} - 1$; **в)** $2013 \cdot 2^{2013}$.

Листок 12. Математические игры-2: анализ позиций

*Позиция называется **выигрышной**, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем обеспечить себе выигрыш. В противном случае позиция называется **проигрышной**.*
Выигрышные и проигрышные позиции расставляются с конца по следующим правилам:

- *позиция, из которой нельзя сделать ход — проигрышная;*
- *если из позиции X **можно** попасть в проигрышную позицию, то позиция X — выигрышная;*
- *если **все** ходы из позиции X ведут в выигрышные позиции, то позиция X — проигрышная.*

Победу может обеспечить себе первый игрок, если начальная позиция — выигрышная, и второй, если она проигрышная. Выигрышная стратегия — ходить на проигрышные позиции.
В описанных ниже играх требуется предъявить выигрышную стратегию для одного из игроков.

$\boxed{1}$ **а)** В левом нижнем углу доски 7×7 стоит *хромой король*, который за один ход может сдвинуться или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Игроки ходят по очереди, Кто не может сделать ход — проиграл. **б)** А теперь хромой король может ходить ещё и на одну клетку вверх.

$\boxed{2}$ На доске 11×15 в левом нижнем углу стоит *хромой конь*. Двое ходят по очереди. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или на две клетки вверх и на одну вправо. Кто не может сделать ход — проиграл.

$\boxed{3}$ Двое игроков ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперед. В начале игры стрелка показывает полдень. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. (Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем указать на 11 часов.)

$\boxed{4}$ **а)** Игра начинается с числа 4. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 2013. Тот же вопрос, если для выигрыша нужно получить число: **б)** $2^{2013} - 1$; **в)** $2013 \cdot 2^{2013}$.

5 Однажды на волшебном дереве выросло 300 золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса договорились по очереди каждую ночь ходить к этому дереву и забирать не более половины имеющихся на нём монет. Если кто-то из них не может больше сорвать ни одной монеты, то отдает другому всё, что успел взять. Первой пошла Алиса. Кто останется в дураках?

6 **а)** Имеются две кучи камней: в одной 5, в другой 7. За один ход можно взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. **б)** А если в одной куче 2013 камней, а в другой — 2014? *Подсказка: найдите в этом листочке аналогичную задачу.*

7 Играют двое. В начале игры первый игрок называет любое целое число от 2 до 9. Затем игроки по очереди умножают полученное число на любое целое число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000.

5 Однажды на волшебном дереве выросло 300 золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса договорились по очереди каждую ночь ходить к этому дереву и забирать не более половины имеющихся на нём монет. Если кто-то из них не может больше сорвать ни одной монеты, то отдает другому всё, что успел взять. Первой пошла Алиса. Кто останется в дураках?

6 **а)** Имеются две кучи камней: в одной 5, в другой 7. За один ход можно взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. **б)** А если в одной куче 2013 камней, а в другой — 2014? *Подсказка: найдите в этом листочке аналогичную задачу.*

7 Играют двое. В начале игры первый игрок называет любое целое число от 2 до 9. Затем игроки по очереди умножают полученное число на любое целое число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000.

Листок 13. Индукция

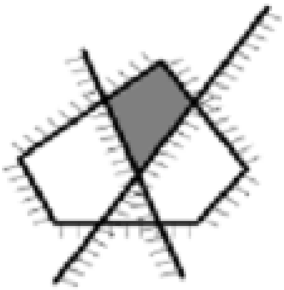
Пусть дана последовательность пронумерованных утверждений: $У_1$, $У_2$, $У_3$, ..., $У_k$, $У_{k+1}$, ... Чтобы доказать все эти утверждения, достаточно:
1) доказать, что верно первое утверждение $У_1$ *(база индукции)*;
2) для каждого натурального k доказать, что если верно $У_k$, то верно и $У_{k+1}$ *(шаг индукции)*.

1 Докажите равенства для любого натурального n:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$;

б) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

в) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



2 **а)** В клетчатом квадрате $n\times n$ закрасили все клетки на главной диагонали и все клетки, лежащие ниже главной диагонали. Сколько всего клеток было закрашено?
б) На плоскости проведено n прямых. Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
в) Коля рисует на клетчатой бумаге пирамидку: в первом сверху ярусе одна клетка, во втором — три, в третьем — пять, в четвёртом — семь, и так далее. Сколько всего клеточек будет в первых 20 ярусах пирамидки?
Указание. *Подумайте, как эта задача связана с предыдущей.*

3 У *бородатого многоугольника* во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает n прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина (см. рисунок выше). В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

4 Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

Листок 13. Индукция

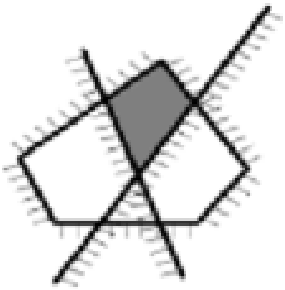
Пусть дана последовательность пронумерованных утверждений: $У_1$, $У_2$, $У_3$, ..., $У_k$, $У_{k+1}$, ... Чтобы доказать все эти утверждения, достаточно:
1) доказать, что верно первое утверждение $У_1$ *(база индукции)*;
2) для каждого натурального k доказать, что если верно $У_k$, то верно и $У_{k+1}$ *(шаг индукции)*.

1 Докажите равенства для любого натурального n:

а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$;

б) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

в) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



2 **а)** В клетчатом квадрате $n\times n$ закрасили все клетки на главной диагонали и все клетки, лежащие ниже главной диагонали. Сколько всего клеток было закрашено?
б) На плоскости проведено n прямых. Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?
в) Коля рисует на клетчатой бумаге пирамидку: в первом сверху ярусе одна клетка, во втором — три, в третьем — пять, в четвёртом — семь, и так далее. Сколько всего клеточек будет в первых 20 ярусах пирамидки?
Указание. *Подумайте, как эта задача связана с предыдущей.*

3 У *бородатого многоугольника* во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает n прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина (см. рисунок выше). В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.

4 Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

$\boxed{5}$ Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три вертикальных стержня на подставке. На один из них надеты n колец разного размера, в порядке убывания размера, меньший лежит на предыдущем по размеру большем. Кольца разрешается перекладывать с одного стержня на другой, при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите: **а)** Все кольца можно переложить на другой стержень.
б) Это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний. **в)** Меньшим количеством перекладываний обойтись нельзя.

$\boxed{6}$ Пусть n — целое неотрицательное число. Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

$\boxed{7}$ Вычислите суммы: сначала вычислите эти суммы для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, а затем найдите закономерность и докажите её по индукции.

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$; **б)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

$\boxed{5}$ Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три вертикальных стержня на подставке. На один из них надеты n колец разного размера, в порядке убывания размера, меньший лежит на предыдущем по размеру большем. Кольца разрешается перекладывать с одного стержня на другой, при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите: **а)** Все кольца можно переложить на другой стержень.
б) Это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний. **в)** Меньшим количеством перекладываний обойтись нельзя.

$\boxed{6}$ Пусть n — целое неотрицательное число. Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

$\boxed{7}$ Вычислите суммы: сначала вычислите эти суммы для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, а затем найдите закономерность и докажите её по индукции.

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$; **б)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Листок 14. Найди крайнего

1 Сколькими способами можно расставить в ряд натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более чем на единицу?

2 Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает барабанить. Какое наибольшее число зайчат может начать барабанить?

3 **а)** По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных. **б)** По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны между собой. (*Средним арифметическим* чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$.)

4 На шахматной доске стоит несколько **а)** ладей; **б)** ферзей. Обязательно ли найдется фигура, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладьи и ферзи не могут.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B, затем — в самый далёкий от B город C, и т. д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

6 Петя купил «Конструктор», в котором было 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какое наименьшее число проверок нужно Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?

7 25 астрономов на двадцати пяти разных планетах наблюдают друг за другом при помощи телескопов, причём каждый наблюдает за ближайшим к нему (все расстояния между планетами различны). Докажите, что: **а)** есть две планеты, астрономы на которых наблюдают друг за другом; **б)** хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

8 В клетках доски 8×8 расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

Листок 14. Найди крайнего

1 Сколькими способами можно расставить в ряд натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более чем на единицу?

2 Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает барабанить. Какое наибольшее число зайчат может начать барабанить?

3 **а)** По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных. **б)** По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны между собой. (*Средним арифметическим* чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$.)

4 На шахматной доске стоит несколько **а)** ладей; **б)** ферзей. Обязательно ли найдется фигура, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладьи и ферзи не могут.)

5 В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города A в самый далёкий от него город B, затем — в самый далёкий от B город C, и т. д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

6 Петя купил «Конструктор», в котором было 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какое наименьшее число проверок нужно Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?

7 25 астрономов на двадцати пяти разных планетах наблюдают друг за другом при помощи телескопов, причём каждый наблюдает за ближайшим к нему (все расстояния между планетами различны). Докажите, что: **а)** есть две планеты, астрономы на которых наблюдают друг за другом; **б)** хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

8 В клетках доски 8×8 расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

Листок 15. Множества

Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое.
Множество можно задать, описав его ($A = \{$нелетающие птицы$\}$), перечислив его элементы ($B = \{1, \text{кошка}, \text{страус}, \text{Ё}\}$) или с помощью других множеств.
Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A есть *подмножество* множества B. Обозначается это $A \subset B$. ($\{1,2,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$).
Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих сразу обоим. Обозначается $A \cap B$.
Объединением двух множеств называется множество, содержащее все их элементы и только их. Обозначается $A \cup B$.
Мощностью множества называется количество элементов в этом множестве. Обозначается $|A|$.

1 Перечислите все: **а)** элементы; **б)** подмножества множества {колбаса, очки, верёвка}.

2 Пусть $A = \{\diamondsuit, \ddagger\}$, $B = \{\ddagger, \bullet, \S\}$. Запишите пересечение и объединение этих двух множеств. Сколько в них элементов?

3 Пусть $A = \{$чётные числа$\}$, $B = \{$числа, которые делятся на 4$\}$, $C = \{$натуральные числа меньше 10$\}$. Чему равны $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$?

4 Сколько подмножеств у множества, содержащего: **а)** 2 элемента; **б)** 4 элемента; **в)** n элементов? **г)** Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств? **д)** Что общего у задач 4 и 5?

5 На полу площадью 12 м^2 лежат три ковра. Площадь одного ковра 5 м^2, другого — 4 м^2, третьего — 3 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1,5 м^2. Все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. **а)** Какова площадь пола, не покрытая коврами? **б)** Какова площадь, покрытая только первым ковром?

6 У 20 марсиан есть уши, а у остальных — нет. У 40 марсиан есть глаза, а у остальных — нет. У 10 марсиан есть и уши, и глаза. Какое наименьшее количество марсиан может быть?

7 На заводе работают 40 фрезеровщиков, каждый из которых является художником, философом или поэтом. Всего среди них 28 художников, 27 философов и 11 поэтов. Какое наибольшее количество фрезеровщиков могут быть одновременно и художниками, и философами?

Листок 15. Множества

Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое.
Множество можно задать, описав его ($A = \{$нелетающие птицы$\}$), перечислив его элементы ($B = \{1, \text{кошка}, \text{страус}, \text{Ё}\}$) или с помощью других множеств.
Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A есть *подмножество* множества B. Обозначается это $A \subset B$. ($\{1,2,5\} \subset \{1,2,3,4,5\}$).
Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих сразу обоим. Обозначается $A \cap B$.
Объединением двух множеств называется множество, содержащее все их элементы и только их. Обозначается $A \cup B$.
Мощностью множества называется количество элементов в этом множестве. Обозначается $|A|$.

1 Перечислите все: **а)** элементы; **б)** подмножества множества {колбаса, очки, верёвка}.

2 Пусть $A = \{\diamondsuit, \ddagger\}$, $B = \{\ddagger, \bullet, \S\}$. Запишите пересечение и объединение этих двух множеств. Сколько в них элементов?

3 Пусть $A = \{$чётные числа$\}$, $B = \{$числа, которые делятся на 4$\}$, $C = \{$натуральные числа меньше 10$\}$. Чему равны $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$?

4 Сколько подмножеств у множества, содержащего: **а)** 2 элемента; **б)** 4 элемента; **в)** n элементов? **г)** Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств? **д)** Что общего у задач 4 и 5?

5 На полу площадью 12 м^2 лежат три ковра. Площадь одного ковра 5 м^2, другого — 4 м^2, третьего — 3 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1,5 м^2. Все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. **а)** Какова площадь пола, не покрытая коврами? **б)** Какова площадь, покрытая только первым ковром?

6 У 20 марсиан есть уши, а у остальных — нет. У 40 марсиан есть глаза, а у остальных — нет. У 10 марсиан есть и уши, и глаза. Какое наименьшее количество марсиан может быть?

7 На заводе работают 40 фрезеровщиков, каждый из которых является художником, философом или поэтом. Всего среди них 28 художников, 27 философов и 11 поэтов. Какое наибольшее количество фрезеровщиков могут быть одновременно и художниками, и философами?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?