Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Математический кружок

(8–9 класс)

Составители: Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, О. А. Манжина, Д. А. Удимов

Второе полугодие. Часть II: методические указания

Москва, 2015

Математический кружок (8–9 класс). Второе полугодие. Часть II: методические указания / Универсальная методическая разработка для элективного курса по решению нестандартных задач в средних общеобразовательных учреждениях г. Москвы // Сост. Е. А. Асташов, Я. А. Верёвкин, О. А. Манжина, Д. А. Удимов. — М.: МГУ, 2015.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Содержание

Геометрия 4

Листок 1. Сумма углов треугольника 4

Листок 2. Неравенство треугольника 8

Листок 3. Построения цирулем и линейкой 12

Листок 4. Средняя линия треугольника 17

Листок 5. Построение отрезков 21

Листок 6. Пифагоровы треугольники 26

Листок 7. Равные площади 30

Комбинаторика 35

Листок 8. Сложить или умножить? 35

Листок 9. Факториал! 41

Листок 10. От порядка к беспорядку 45

Листок 11. Много похожих задач 50

Листок 12. Треугольник Паскаля 53

Листок 13. История про футболки и сочетания 56

Алгебра 59

Листок 14. Формулы сокращённого умножения 59

Листок 15. Неравенство о среднем 63

Геометрия

Листок 1. Сумма углов треугольника

Теорема. *Сумма внутренних углов треугольника равна* 180°.

В начале занятия предлагается сделать следующее.

1. Сформулировать и доказать теорему о сумме внутренних углов треугольника. (Для доказательства через вершину треугольника проводится прямая, параллельная противоположной стороне, и используется равенство накрест лежащих углов при двух параллельных прямых, секущими к которым выступают боковые стороны треугольника.)
2. Вывести из этой теоремы свойство внешнего угла треугольника (предварительно напомнив его определение).
3. Разобрать для примера такую задачу:

• В треугольнике DEF проведена медиана DK. Найдите углы треугольника DEF, если $\angle KDE = 70^\circ, \angle DKF = 140^\circ$.

Решение. $\angle EKD = 180^\circ - \angle DKF = 40^\circ$ по свойству смежных углов. По свойству внешнего угла $\angle DKF = \angle E + \angle EDK$, откуда $\angle E = 70^\circ$. Тогда ΔDEK — равнобедренный ($DK = EK$) по признаку равнобедренного треугольника (углы при стороне DE равны по 70°). А поскольку $EK = KF$ по определению медианы, $DK = EK = KF$, то есть ΔDKF — тоже равнобедренный. Тогда $\angle F = \angle FDK = (180^\circ - \angle DKF) : 2 = 20^\circ$. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC. Известно, что $\angle ABM = \angle ACB$ и $\angle CBN = \angle BAC$. Докажите, что треугольник BMN — равнобедренный.

Решение. По теореме о внешнём угле треугольника

$$\angle BMN = \angle ABM + \angle BAC = \angle ACB + \angle CBN = \angle BNM.$$

И применяем признак равнобедренного треугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Какие есть признаки равнобедренного треугольника? Что можно сказать про углы* $\angle BMN$ *и* $\angle BNM$*?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найдите угол B.

Решение. Обозначим $\angle B = \alpha$. Тогда $\angle BAM = \alpha$, $\angle AMC = \angle B + \angle BAM = 2\alpha$, $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$ (пользуемся свойством равнобедренных треугольников). Из уравнения $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$ находим, что $\alpha = \mathbf{36}^\circ$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Что вы знаете о равнобедренных треугольниках? Чему равен угол* $\angle AMC$*?*

3 Медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что треугольник прямоугольный.

Решение. Пусть CM — медиана треугольника ABC. Тогда по условию $CM = AB : 2 = AM = BM$. Поэтому треугольники CMB и AMC — равнобедренные, а значит, углы при их основании равны. Пусть $\angle A = \angle ACM = \alpha$, $\angle B = \angle BCM = \beta$. По теореме о сумме углов треугольника ABC имеем $2\alpha + 2\beta = 180°$, откуда $\angle ACB = \alpha + \beta = 90°$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Сколько здесь равнобедренных треугольников? Как выразить угол, из которого проведена медиана, через два остальных угла?*

4 В треугольнике ABC проведена биссектриса BK. Известно, что $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите $\angle A - \angle C$.

Решение. Пусть $\angle AKB = 4\alpha$, тогда $\angle CKB = 5\alpha$. Пусть также $\angle ABK = \angle CBK = \beta$. Тогда по теореме о сумме углов треугольника для ΔABK и ΔBCK имеем $4\alpha + \beta + \angle A = 180° = 5\alpha + \beta + \angle C$, откуда $\angle A - \angle C = \alpha$. Но поскольку углы AKB и CKB — смежные, получаем $\angle AKB + \angle AKB = 9\alpha = 180°$, откуда $\alpha = \mathbf{20}°$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Можете ли вы найти углы* $\angle AKB$ *и* $\angle BKC$*? Выпишите сумму углов треугольников* AKB *и* BKC*.*

5 В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки K и M, причём $AK = AC$ и $BM = BC$. Найдите угол MCK.

Решение. Пусть $\angle A = \alpha, \angle B = \beta$. Треугольники AKC и BMC — равнобедренные, поэтому $\angle ACK = \angle AKC = (180° - \alpha) : 2, \angle BCM = \angle BMC = (180° - \beta) : 2$. Тогда по теореме о сумме углов для треугольника CKM имеем

$$(180° - \alpha) : 2 + (180° - \beta) : 2 + \angle MCK = 180°.$$

Отсюда с учётом равенства $\alpha + \beta = 90°$ (сумма острых углов в прямоугольном треугольнике) находим $\angle MCK = \mathbf{45}°$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Чему равна сумма углов при гипотенузе? Как через них выразить искомый угол?*

$\boxed{6}$ На плоскости отметили пять точек A, B, C, D, E, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Их соединили отрезками: AC, CE, EB, BD, DA. В результате получилась пятиконечная звезда. Докажите, что

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ.$$

Решение. Обозначим $BD \cap CE = A_1$, $AD \cap CE = B_1$. По свойству внешнего угла $\angle DA_1B_1 = \angle B + \angle E$, $\angle DB_1A_1 = \angle A + \angle C$ (поскольку $\angle DA_1B_1$ — внешний для ΔA_1BE, а $\angle DB_1A_1$ — внешний для ΔAB_1C). По теореме о сумме углов треугольника ΔA_1B_1D имеем $\angle D + \angle DA_1B_1 + \angle DB_1A_1 = \angle D + \angle B + \angle E + \angle A + \angle C = \mathbf{180^\circ}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Посмотрите на один из концов звезды (маленький треугольник). Можно ли сумму углов звезды свести к сумме углов этого треугольника?*

$\boxed{7}$ В треугольнике ABC $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 40^\circ$. Биссектриса AD равна 2. Найдите разность длин сторон BC и AB.

Решение. На стороне BC отложим отрезок BM, равный AB. В равнобедренном треугольнике ABM углы при основании AM равны по 80°, поэтому $\angle CAM = \angle AMD - \angle ACB = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ = \angle ACM$. Кроме того, $\angle ADM = \angle ABC + \angle BAD = 20^\circ + 60^\circ = 80^\circ = \angle AMD$. Значит, треугольники AMC и AMD равнобедренные. Следовательно, $BC - AB = BC - BM = CM = AM = AD = \mathbf{2}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте сделать дополнительное построение отрезка $BM = AB$ на стороне BC и провести отрезок AM. Какие равнобедренные треугольники вы можете найти?*

$\boxed{8}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярдного стола, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могло ли это быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону «угол падения равен углу отражения»).

Решение. **Могло.** Искомая траектория может быть получена так. Разделим сторону правильного треугольника на три равные части. Выпустим шар из одной из точек, делящих сторону на эти части, вдоль прямой, параллельной одной из двух других сторон. Нетрудно убедиться, что шар будет двигаться по замкнутой траектории, которая три раза пройдёт через центр бильярдного стола в различных направлениях (параллельных сторонам стола), а затем вернется в исходную точку. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте разделить сторону на три равные части. А теперь проведите прямую, параллельную любой из сторон через любую точку.*

Листок 2. Неравенство треугольника

Для любых трёх точек A, B, C на плоскости выполнено неравенство

$$AB + BC \geqslant AC,$$

которое обращается в равенство тогда и только тогда, когда точка B лежит на отрезке AC.

В начале занятия предлагается только напомнить формулировку неравенства треугольника. Доказывать его при этом, на наш взгляд, необязательно: это делается на уроках геометрии в 7 классе.

$\boxed{\mathbf{1}}$ В треугольнике длины двух сторон равны 3,14 и 0,67. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом.

Решение. Пусть длина третьей стороны равна x. С одной стороны, должно быть $x < 3{,}14 + 0{,}67$. С другой стороны, должно быть $x + 0{,}67 > 3{,}14$. Из этих условий и условия целочисленности x получим $x = \mathbf{3}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Пусть третья сторона равна x. Попробуйте написать неравенства треугольника.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Существуют ли треугольники с такими длинами сторон:
а) 1 м, 2 м, 3 м; **б)** 3 м, 4 м, 5 м; **в)** 3^{33} м, 3^{33} м, 3^{30} м; **г)** 2^{20} м, 2^{21} м, 2^{22} м?

Решение. **а) нет; б) да; в) да** (равнобедренный треугольник, у которого длина основания меньше удвоенной длины боковой стороны, существует всегда); **г) нет** ($2^{20} + 2^{21} < 2 \cdot 2^{21} = 2^{22}$). □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте написать различные неравенства треугольника. Всегда ли они выполняются?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что: **а)** длина любой стороны треугольника больше разности длин двух других его сторон; **б)** в треугольнике длина любой стороны не превосходит полупериметра; **в)** в треугольнике сумма длин медиан больше полупериметра; **г)** у выпуклого четырёхугольника сумма длин диагоналей больше полупериметра и меньше периметра. **д)** Верны ли утверждения пункта г) для невыпуклого четырёхугольника?

Решение. **а)** Если $a + b > c$, то $a > b - c$. **б)** Если $a + b > c$, то $P = a + b + c > c + c$, откуда $P/2 > c$. **в)** $m_a + a/2 > b$, $m_b + b/2 > c$, $m_c + c/2 > a$. Отсюда $m_a + m_b + m_c + (a+b+c)/2 > a + b + c$, откуда $m_a + m_b + m_c > (a+b+c)/2 = P/2$.

г) У выпуклого четырёхугольника сумма длин диагоналей больше полупериметра и меньше периметра. Обозначим четырёхугольник $ABCD$ и $AB \cap CD = E$. Тогда $AE + BE > AB, BE + CE > BC, CE + DE > CD, DE + AE > DA$. Складывая эти неравенства, получим $2 \cdot (AE + CE + BE + DE) = 2 \cdot (AC + BD) > AB + BC + CD + DA = P$, и, следовательно, $AC + BD > P/2$. С другой стороны, $AB + BC > AC, BC + CD > BD, CD + DA > AC, DA + AB > BD$. Складывая эти неравенства, получим $2 \cdot (AB + BC + CD + DA) = 2P > 2 \cdot (AC + BD)$, откуда $P > AC + BD$. **д) Первое нет, второе да.** Доказательство второго утверждения никак не использовало выпуклость четырёхугольника и точку пересечения диагоналей, так что оно годится и для невыпуклого четырёхугольника. А вот первое утверждение неверно. Например, нарисуем на координатной плоскости четырёхугольник с вершинами в точках $(0, 1), (4, 0), (0, -1), (5, 0)$. Очевидно, в нём сумма длин диагоналей намного меньше полупериметра. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте выписывать неравенства треугольника. В случае с медианами попробуйте выписать неравенства для меньших треугольников, образованных медианами. В случае четырёхугольника попробуйте выписать неравенства треугольника для треугольников, образованных его диагоналями и сторонами.*

$\boxed{4}$ Петя купил «Конструктор», в котором было **а)** 4 палочки; **б)** 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение, составляя из палочек треугольники. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какого наименьшего число проверок точно хватит Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?

Решение. **В обоих случаях хватит одной проверки.** Возьмём две самые короткие палочки (длин a и b) и самую длинную (длины c). Если из них треугольник сложится (то есть $a + b > c$), то сложатся и все остальные. Ведь для любых других трёх палочек длин d, e, f из набора получим $d + e \geqslant a + b > c \geqslant f$, так что неравенство треугольника не нарушится. Ну а если не сложится уже из них, то все плохо, и в инструкции обман. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте сделать это за одну проверку. Возьмите палочки так, чтобы они были самыми длинными или короткими.*

$\boxed{5}$ Расстояние от дома Васи до магазина 200 м, от магазина до футбольного поля 300 м, от футбольного поля до школы 500 м, а от дома до школы 1 км. А какое расстояние от дома Васи до футбольного поля?

Решение. Так как 200 м + 300 м + 500 м = 1 км, все перечисленные объекты лежат на одной прямой. Значит, расстояние от дома до футбольного поля равно сумме расстояний от дома до магазина и от магазина до футбольного поля, то есть 200 + 300 = **500 м.** □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте нарисовать это. А теперь выпишите неравенство треугольника.*

6 Найдите внутри выпуклого четырёхугольника точку, сумма расстояний от которой до вершин была бы наименьшей. (Четырёхугольник называется выпуклым, если его диагонали пересекаются внутри него.)

Решение. **Это точка пересечения диагоналей.** Обозначим четырёхугольник $ABCD$ и $AC \cap BD = E$. Рассмотрим произвольную точку F внутри $ABCD$. Тогда $AF + CF \geqslant AE + CE$, $BF + DF \geqslant BE + DE$. Кроме того, очевидно, что эти неравенства одновременно обращаются в равенство тогда и только тогда, когда $F = E$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Рассмотрите точку пересечения диагоналей. Возьмите любую другую точку. Как можно выписать неравенство треугольника так, чтобы там участвовали обе этих точки?*

7 Верно ли, что среди любых 10 отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник?

Решение. **Неверно.** Например, рассмотрим отрезки длин $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$. Выберем любые три из них. Самый большой из этих трёх будет как минимум вдвое длиннее следующего по длине и как минимум вчетверо длиннее самого короткого, так что неравенство треугольника для них будет нарушено. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Вспомните задачу 1г). Попробуйте построить похожий пример для 10 отрезков.*

8 Имеется 10 отрезков, причём известно, что длина каждого из них — целое число сантиметров. Два самых коротких отрезка — по 1 см, самый длинный — 50 см. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, из которых можно будет составить треугольник.

Решение. Предположим противное, то есть что ни из каких трёх отрезков нельзя составить треугольник. Рассмотрим длины отрезков в сантиметрах по возрастанию: $l_1 = l_2 = 1 \leqslant l_3 \leqslant l_4 \leqslant \ldots \leqslant l_{10} = 50$. Так как из трёх самых коротких отрезков нельзя составить треугольник, то $l_3 \geqslant l_1 + l_2 = 1 + 1 = 2$. Аналогично, $l_4 \geqslant l_2 + l_3 \geqslant 1 + 2 = 3$. Далее, $l_5 \geqslant 2 + 3 = 5$, $l_6 \geqslant 3 + 5 = 8$, $l_7 \geqslant 5 + 8 = 13$, $l_8 \geqslant 8 + 13 = 21$, $l_9 \geqslant 13 + 21 = 33$, $l_{10} \geqslant 21 + 33 = 55$ (это числа Фибоначчи). Противоречие с условием $l_{10} = 50$ доказывает утверждение. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте от противного. Быть может, получится ограничить как-то длины всех отрезков?*

Листок 3. Построения цирулем и линейкой

Для построений можно пользоваться линейкой без делений и циркулем.
В начале занятия надо пояснить, что такое построение с помощью циркуля и линейки. А именно:

- с помощью математической линейки (без делений и с непрямыми углами) можно только провести прямую через две отмеченные точки. С её помощью нельзя измерить длину отрезка, провести перпендикуляр к прямой или прямую, параллельную данной;
- с помощью циркуля можно провести окружность с данным центром и радиусом и отложить отрезок, равный данному.

Полезно напомнить определение окружности. Дальше разбираем несколько примеров:

- как построить серединный перпендикуляр к отрезку и опустить перпендикуляр на прямую из данной точки (с помощью свойства серединного перпендикуляра к отрезку, которое заодно стоит напомнить и доказать);
- как построить прямую, параллельную данной (два раза построив перпендикуляры);
- как построить угол, равный данному;
- как построить треугольник по трём сторонам (тут обратите внимание школьников на то, что эта задача не всегда имеет решение: важно неравенство треугольника!).

После этого можно уже каждый раз не заставлять школьников объяснять, как они делают эти построения. От сильных школьников можно требовать анализа задачи: всегда ли задача имеет решение; всегда ли оно единственно; если не всегда, то при каких условиях?
Обратите ещё внимание школьников на связь между задачами на построение и признаками равенства треугольников. Например, третий признак равенства треугольников говорит, что треугольник однозначно задаётся длинами трёх сторон, а поэтому с помощью циркуля и линейки решается задача о построении треугольника по трём сторонам. Аналогично обстоит дело и с двумя другими признаками равенства треугольников (см. задачи ниже). Задача 1б, в частности, показывает, что признак равенства треугольников по двум сторонам и углу НЕ между ними неверен без дополнительных оговорок (например, что данный угол — наибольший в треугольнике).
$\boxed{1}$ Постройте треугольник: **а)** по двум сторонам и углу между ними; **б)** по двум сторонам и углу, лежащему против одной из этих сторон. Сколько различных треугольников может получиться?

Решение. **а)** Строим заданный угол и от вершины откладываем стороны. **б)** В процессе построения становится видно, что решений чаще всего два: когда угол между известными сторонами либо острый, либо тупой. При удачном стечении начальных условий этот угол может оказаться прямым, тогда решение будет единственным. При неудачном их стечении решения может и не быть. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Вспомните первый признак равенства треугольников. Вспомните, как откладывать углы и отрезки, равные данным. Что будет, если данный угол острый? А если тупой?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Постройте прямоугольный треугольник: **а)** по двум катетам;
б) по катету и гипотенузе; **в)** по катету и прилежащему острому углу;
г) по катету и противолежащему острому углу.

Решение. **а)** Строим прямой угол и от вершины откладываем катеты. **б)** Строим прямой угол, от вершины откладываем катет. Затем из другого конца катета проводим окружность радиусом в длину гипотенузы; точка её пересечения с другой стороной прямого угла будет третьей вершиной треугольника. **в)** Строим прямой угол, от вершины откладываем катет. Затем из другого конца катета проводим прямую под заданным углом к катету; точка её пересечения с другой стороной прямого угла будет третьей вершиной треугольника. **г)** Находим прилежащий острый угол, знаю, что острые углы прямоугольного треугольника в сумме дают $90°$, и сводим задачу к пункту в). Во всех пунктах решение существует и единственно (если только катет не длиннее гипотенузы). □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Верно ли, что пункт а) в чём-то похож на предыдущую задачу? Какой второй признак равенства треугольников? А как построить треугольник по двум углам? А как построить прямой угол?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Постройте треугольник:
а) по двум сторонам и медиане, проведённой к первой стороне;
б) по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону;
в) по стороне и опущенным на неё высоте и медиане.

Решение. **а)** Строим первую сторону и её середину. Проводим окружности: из одного конца стороны — с радиусом, равным длине другой стороны, из середины — с радиусом, равным длине медианы. Точка пересечения этих окружностей — третья вершина треугольника. Если решение существует (а существует оно при выполнении понятно какого неравенства треугольника), то оно единственно с точностью до симметрии. **б)** Строим прямую и восстанавливаем к ней перпендикуляр в любой точке. На нём откладываем отрезок, равный высоте. Из конца высоты проводим окружности с радиусами, равными известным длинам сторон. Точки пересечения этих окружностей с первой прямой — вершины треугольника. Решение единственно в случае, если одна из сторон по длине равна высоте или если стороны равны по длине между собой и больше высоты, и не существует, если хоть одна из сторон короче высоты или если обе стороны равны высоте; в остальных случаях решений два. **в)** Строим прямую и восстанавливаем к ней перпендикуляр в любой точке. На нём откладываем отрезок, равный высоте. Из конца высоты проводим окружность с радиусом, равным медиане. Точка пересечения этой окружности с первой прямой — середина известной стороны треугольника. Теперь от неё в обе стороны откладываем по отрезку, равному половине известной стороны; их концы будут вершинами треугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– Попробуйте построить сначала треугольник по трём сторонам. А можем ли мы здесь это применить?

$\boxed{4}$ **а)** Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудалённую от точек A и B. Всегда ли такая точка существует?
б) Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько различных точек может получиться?
Подсказка: используйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

Решение. **а)** Проводим серединный перпендикуляр к отрезку AB и ищем его пересечение с прямой a. Если они параллельны и не совпадают, то пересечения не будет, если параллельны и совпадают, решений бесконечно много, если не параллельны, решение единственно. **б)** Та же идея, что в пункте а. Задача может иметь от 0 до 2 решений. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– Какие точки вообще равноудалены от точек A и B? Быть может, это какая-то прямая?

$\boxed{5}$ Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и сумме длин двух других сторон.

Решение. Строим известную сторону и откладываем от неё известный угол. На его второй стороне откладываем сумму двух сторон треугольника. Получившуюся при этом точку соединяем отрезком с концом известной стороны треугольника и проводим серединный перпендикуляр к этому отрезку. Точка его пересечения со стороной (понятно, какой из) угла будет третьей вершиной треугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте сначала построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, считая сумму сторон ещё одной стороной. А теперь примените предыдущую задачу.*

$\boxed{6}$ **а)** Постройте окружность, проходящую через три данные точки. Всегда ли такая окружность существует? **б)** Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. (*Описанная окружность* — это окружность, проходящая через все вершины треугольника.)

Решение. **а)** Берём серединные перпендикуляры к двум из отрезков, соединяющих точки. Их точка пересечения — центр искомой окружности. **б)** Строим одну из сторон и серединный перпендикуляр к ней. Из конца стороны проводим окружность радиусом как радиус описанной окружности. Точка пересечения этой окружности с серединным перпендикуляром — центр описанной окружности. Теперь строим эту окружность, а из одной из уже построенных вершин треугольника проводим окружность радиуса, равного второй стороне; пересечение этой окружности с описанной окружностью будет третьей вершиной треугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Что значит, что окружность проходит через три точки? Что можно сказать про её центр? Как можно построить центр описанной окружности, зная две стороны треугольника?*

$\boxed{7}$ **а)** Докажите, что гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанной около него окружности. *Подсказка: достройте треугольник до прямоугольника либо воспользуйтесь задачей 20.6 а).*
Постройте прямоугольный треугольник: **б)** по гипотенузе и острому углу; **в)** по гипотенузе и высоте, опущенной на неё.

Решение. **а)** Достроим треугольник до прямоугольника и увидим, что середина гипотенузы — точка пересечения диагоналей, а значит, равноудалена от вершин. В пунктах **б)** и **в)** строим гипотенузу и описанную окружность, а затем проводим, соответственно, луч под нужным углом к гипотенузе или прямую, параллельную гипотенузе, на расстоянии от неё, равном высоте. Точка пересечения окружности с лучом или прямой соответственно — третья вершина треугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Воспользуйтесь пунктом а) этой задачи.*

$\boxed{8}$ Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме двух катетов. Сколько различных треугольников может получиться?

Решение. Пусть построен искомый ΔABC с длинами сторон a, b, c, $\angle C = 90°$. На продолжении AC за точку C отложим отрезок $CD = a$. Тогда $\angle BDC = 45°$, а BC — высота в ΔABD, в котором $AB = c$, $AD = a+b$. Тем самым исходная задача свелась к построению треугольника с углом в $45°$, лежащим против стороны c и прилежащим к стороне $a + b$ (это мы умеем из задачи 1 б) и затем построению высоты этого треугольника. Задача в общем случае имеет два решения, но может иметь одно решение или ни одного. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте провести анализ задачи, предположите, что треугольник уже построен. Попробуйте свети её к одной из предыдущих задач.*

Листок 4. Средняя линия треугольника

Определение. *Средняя линия треугольника* — это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема (свойства средней линии треугольника). *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

В начале занятия дайте определение средней линии треугольника и докажите её свойства. Осторожно: многие восьмиклассники ещё ничего не знают про подобие треугольников, поэтому доказываем так:

Доказательство. Пусть в ΔABC точка M — середина стороны AB, а точка N на стороне BC выбрана так, что $MN||AC$. Докажем, что $BN = NC$, то есть что отрезок MN совпадает со средней линией ΔABC.

Для этого проведем через точку N прямую $NK||AB, NK \cap AC = K$. По построению $AMNK$ — параллелограмм, а значит, $BM = AM = NK$ и $MN = AK$. Далее, $\Delta BMN = \Delta NKC$ по второму признаку ($BM = NK$, $\angle B = \angle KNC$ и $\angle MNB = \angle C$ как соответственные при понятно каких параллельных прямых и секущих), откуда $BN = NC$ и $AK = MN = KC$, из чего следует нужное утверждение. $\square$

Разберите для примера задачи:

• Дан четырёхугольник $ABCD$. Точки K, L, M, N — середины его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $KLMN$, если $AC + BD = 18$.

Решение. Стороны четырёхугольника $KLMN$ являются средними линиями треугольников ABC, BCD, CDA, DAB соответственно. Поэтому $KL = MN = \frac{1}{2}AC$ и $NK = LM = \frac{1}{2}BD$, откуда $P_{KLMN} = KL + LM + MN + NK = AC + BD = 18$. $\square$

• Докажите, что в ΔABC отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC, и медиана, проведенная из вершины A, делят друг друга пополам.

Решение. Пусть AM — медиана треугольника ABC, точки K и L — середины сторон AB и AC соответственно. По теореме о средней линии треугольника $LM||AB$ и $KM||AC$, поэтому противолежащие стороны четырёхугольника $AKML$ попарно параллельны. Значит, $AKML$ — параллелограмм, и его диагонали AM и KL делятся точкой пересечения пополам. $\square$

$\boxed{1}$ В треугольнике провели три средние линии.

а) Докажите, что они разбивают его на четыре равных треугольника.

б) Найдите периметр каждого из них, если периметр исходного треугольника равен 28.

Решение. **а)** Следует из свойства средней линии и третьего признака равенства треугольников. **б)** Раз каждая сторона получившихся треугольников вдвое меньше соответствующей стороны исходного треугольника, то и периметр будет вдвое меньше, то есть **14**. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Вспомните свойства средней линии. А какие есть признаки равенства треугольников?*

2 Длины двух сторон треугольника равны a и b. Через середину третьей стороны проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Найдите периметр образовавшегося при этом четырёхугольника.

Решение. Отрезки проведенных прямых, заключенные внутри исходного треугольника, являются его средними линиями, поэтому их длины равны, соответственно, $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Получившийся четырёхугольник — параллелограмм по построению, а значит, его периметр равен $2\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Что за отрезки образовались, когда мы провели прямые?*

3 Средняя линия, параллельная стороне AC треугольника ABC, равна половине стороны AB. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение. Назовем среднюю линию MN $(AM = MB, BN = NC)$. ΔBMN — равнобедренный по условию, поэтому $\angle B = \angle BNM$. Поскольку $MN||AC$, $\angle C = \angle BNM = \angle B$, а значит, ΔABC — равнобедренный $(AB = AC)$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Какие равнобедренные треугольники вы видите? Что вы знаете про параллельные прямые и углы?*

4 С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если даны середины трёх его сторон.

Решение. Через каждую вершину треугольника, образованного серединами сторон, проведем прямую параллельно стороне этого треугольника, лежащей против этой вершине. Три построенные прямые будут содержать стороны искомого треугольника, а точки их пересечения будут его вершинами. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Если мы построим треугольник с вершинами в данных точках, треугольник из каких отрезков мы получим? Что мы можем сказать про его вершины?*

$\boxed{5}$ Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $BM = 3AM$ и $CN = 3AN$. **а)** Докажите, что $MN||BC$. **б)** Найдите MN, если $BC = 12$.

Решение. Пусть K и L — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $KL||BC$ и $KL = \frac{1}{2}BC = 6$ по свойству средней линии. Кроме того, MN — средняя линия ΔAKL. Поэтому $MN||KL||BC$ и $KL = \frac{1}{2}MN = \mathbf{3}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Постройте среднюю линию KL треугольника ABC. Что можно сказать про среднюю линию треугольника AKL?*

$\boxed{6}$ **а)** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. **б)** Докажите, что середины двух противоположных сторон любого четырёхугольника и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

Решение. **а)** Стороны четырёхугольника с вершинами в серединах сторон исходного четырёхугольника параллельны диагоналям исходного четырёхугольника по свойству средней линии. А значит, противоположные стороны построенного четырёхугольника попарно параллельны, то есть это параллелограмм. **б)** Две из сторон построенного четырёхугольника параллельны одной и той же стороне исходного четырёхугольника и равны ее половине по свойству средней линии. А значит, противоположные стороны построенного четырёхугольника равны и параллельны, поэтому это параллелограмм по признаку параллелограмма. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Средними линиями каких треугольников являются отрезки, соединяющие середины соседних сторон любого четырёхугольника? А отрезки, соединяющие середины сторон с серединами диагоналей?*

$\boxed{7}$ Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны. Докажите, что его диагонали перпендикулярны.

Решение. Построим четырёхугольник с вершинами в серединах сторон исходного четырёхугольника. По задаче 6 а) это параллелограмм. Упомянутые в условии отрезки — его диагонали, а раз они равны, то это прямоугольник, то есть его смежные стороны перпендикулярны. А поскольку его стороны параллельны соответствующим диагоналям исходного четырёхугольника по свойству средней линии, то эти диагонали тоже перпендикулярны. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– Постройте четырёхугольник с вершинами в серединах сторон. Что можно сказать про четырёхугольник с равными диагоналями? А теперь посмотрим на предыдущую задачу.

$\boxed{8}$ **а)** Одна из сторон треугольника равна a. Найдите длину отрезка, соединяющего середины медиан, проведённых к двум другим сторонам. **б)** Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности её оснований. **в)** Докажите, что средняя линия трапеции (то есть отрезок, соединяющий середины её боковых сторон) параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Решение. **а)** Пусть K и L — середины медиан BM и CN треугольника ABC со стороной $BC = a$. Если F — середина MC, то FL — средняя линия треугольника MCN, а FK — средняя линия треугольника BMC, поэтому $FL||MN||BC||FK$. Значит, точки K, L и F лежат на одной прямой. Следовательно, $KL = KF - FL = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \mathbf{\frac{1}{4}a}$.
б) Точно так же, как в пункте а).
в) Пусть ещё E — середина стороны BN трапеции $BNMC$ (в обозначениях пункта а). Тогда EF — средняя линия трапеции. По свойству средней линии в ΔBMN $EK = \frac{1}{2}MN$ и $EK||MN$. Значит, точки E, K, L, F лежат на одной прямой. Поэтому $EF = EK + KF = \frac{1}{2}MN + \frac{1}{2}BC$, что и требовалось. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– Попробуйте на одной из сторон треугольника, не совпадающей с а, разбить половину стороны, ближайшую к а, ещё раз пополам. Какие средние линии можно увидеть?

$\boxed{9}$ С помощью циркуля и линейки постройте пятиугольник, если даны середины всех его сторон.

Подсказка: воспользуйтесь задачей 6.

Решение. Предположим, что задача решена. Пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 — середины последовательных сторон $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_1A_5$ искомого пятиугольника. Если K — середина диагонали A_3A_5, то четырёхугольник $M_1M_2KM_5$ — параллелограмм по задаче 6 а). Построение: находим точку K; строим треугольник $A_3A_4A_5$ по серединам его сторон — M_3, M_4 и K; построенный треугольник достраиваем до искомого пятиугольника. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– Попробуйте решать задачу с конца, т.е. пусть она решена. Попробуйте сначала построить треугольник.

Листок 5. Построение отрезков

Для решения задач сегодняшнего занятия вам могут пригодиться следующие факты.

1. **Теорема Фале́са.** Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ лежат на прямой a, а точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — на прямой b, причём $A_1B_1 || A_2B_2 || A_3B_3 || \ldots || A_nB_n$ и $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n$. Тогда $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = B_{n-1}B_n$.
2. **Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c имеет место равенство $a^2 + b^2 = c^2$.
3. Если в прямоугольном треугольнике основание высоты h, опущенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a_c и b_c, то $h^2 = a_c \cdot b_c$.

Занятие посвящено построению отрезков заданной длины с помощью циркуля и линейки. В начале занятия напомните детям, что с помощью циркуля и линейки можно:

- проводить прямую через две данные точки;
- откладывать отрезок, равный данному, на данной прямой;
- строить окружность данного радиуса;
- строить серединный перпендикуляр к отрезку;
- опускать на прямую перпендикуляр из данной точки и восстанавливать перпендикуляр к прямой в данной точке;
- проводить прямую, параллельную данной, через данную точку.

В принципе можно подробно не рассказывать, как именно все это делается, а просто напомнить, что это можно, и считать, что известно, как.

Напомните формулировку теоремы Фалеса (доказательство рассказывать не обязательно, а вот чертёж на доске надо изобразить). Покажите, как с её помощью делить отрезок на три равные части. Делается это так: 1) проводим через один из концов отрезка прямую, не проходящую через второй конец; 2) на этой прямой откладываем от конца исходного отрезка три равных отрезка совершенно любой длины; 3) конец третьего из этих отрезков соединяем прямой со вторым концом того отрезка, который хотим делить на три части; 4) через оба конца второго из отложенных отрезков проводим прямые параллельно прямой, построенной в пункте 3; 5) по теореме Фалеса эти параллельные прямые отсекут на нашем отрезке три равных отрезка.

Напомните теорему Пифагора и покажите, как с её помощью, имея отрезок длины 1, построить, например, отрезок длиной $\sqrt{10}$. Для этого надо построить прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3, его гипотенуза по теореме Пифагора — искомый отрезок.

$\boxed{1}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\frac{1}{2}$; **б)** $\frac{1}{4}$; **в)** $\frac{1}{5}$; **г)** $\frac{4}{5}$; **д)** $\frac{1}{n}$; **е)** $\frac{m}{n}$ (m, n — натуральные числа).

Подсказка: воспользуйтесь теоремой Фалеса.

Решение. **а)** Делим отрезок пополам, строя серединный перпендикуляр к нёму; **б)** повторяем действие пункта а дважды; **в)** делим отрезок на 5 частей аналогично тому, как делили на 3 части; **г)** получаем как побочный эффект построения в пункте в; **д)** делим отрезок на n частей аналогично тому, как делили на 3 части; **е)** m раз откладываем отрезок, построенный в пункте д. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Если построить серединный перпендикуляр, на сколько частей разделится отрезок? А если теперь построить серединный перпендикуляр к получившейся части? Вспомним теорему Фалеса. Если l раз отложить отрезок длины k, отрезок какой длины мы получим?*

$\boxed{2}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{2}$; **б)** $\sqrt{5}$; **в)** $\sqrt{8}$; **г)** $\sqrt{13}$; **д)** $\sqrt{17}$.

Подсказка: воспользуйтесь теоремой Пифагора.

Решение. Используем теорему Пифагора: **а)** $\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}$; **б)** $\sqrt{5} = \sqrt{1^2+2^2}$; **в)** $\sqrt{8} = \sqrt{2^2+2^2}$; **г)** $\sqrt{13} = \sqrt{2^2+3^2}$; **д)** $\sqrt{17} = \sqrt{1^2+4^2}$. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Вспомните теорему Пифагора и задачу про построение отрезка длины $\sqrt{10}$. Как она решалась? А какими должны быть длины катетов прямоугольного треугольника, чтобы гипотенуза получилась нужной нам длины?*

$\boxed{3}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{3}$; **б)** $\sqrt{6}$; **в)** $\sqrt{7}$; **г)** $\sqrt{14}$.

Решение. Используем теорему Пифагора и результаты предыдущей задачи: **а)** $\sqrt{3} = \sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}$; **б)** $\sqrt{6} = \sqrt{2^2+\sqrt{2}^2}$; **в)** $\sqrt{7} = \sqrt{2^2+\sqrt{3}^2}$; **г)** $\sqrt{14} = \sqrt{1^2+\sqrt{13}^2}$. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Что будет, если мы построим прямоугольный треугольник со сторонами 1 и $\sqrt{2}$? Чему будет равна гипотенуза? Попробуйте обощить на остальные пункты.*

$\boxed{4}$ **а)** Даны отрезки длины 1 и $\sqrt{k}$ (k — натуральное число). С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{k+1}$.

б) Докажите, что, имея отрезок длины 1, можно с помощью циркуля и линейки построить отрезок длины $\sqrt{n}$ для любого натурального n.

Решение. **а)** Используем теорему Пифагора, как в предыдущей задаче: $\sqrt{k+1} = \sqrt{1^2 + \sqrt{k}^2}$. **б)** Выводим с помощью пункта а по индукции. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте выразить* $\sqrt{k+1}$ *через корень из суммы квадратов. А теперь примените индукцию.*

$\boxed{5}$ Дан отрезок длины 1 и натуральные числа m и n. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$.

Подсказка: воспользуйтесь задачами 1 и 4.

Решение. Построим сначала отрезок длины $\sqrt{mn}$, как в задаче 4. Потом заметим, что $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{mn}}{n}$, и воспользуемся задачей 1. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте построить отрезок длины* $\sqrt{mn}$ *и применить задачу 1.*

$\boxed{6}$ **а)** Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной на гипотенузу. (Подсказка: в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.) **б)** Даны отрезки длины a и b. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{ab}$.

Решение. **а)** Строим гипотенузу, затем параллельно ей проводим прямую на расстоянии, равной данной высоте. Помня, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, строим окружность с центром в середине гипотенузы и радиусом, равным половине гипотенузы. Точка пересечения этой окружности с построенной до этого прямой (если она есть) будет вершиной прямого угла искомого треугольника. **б)** Воспользуемся тем, что если в прямоугольном треугольнике основание высоты h, опущенной из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки a_c и b_c, то $h^2 = a_c \cdot b_c$. Отложим на одной прямой отрезки длин a и b с общим концом. Построим на получившемся отрезке длины $a+b$ как на диаметре окружность. В общем конце отрезков a и b восстановим перпендикуляр к этому отрезку. Точка пересечения перпендикуляра с окружностью будет вершиной прямого угла треугольника с гипотенузой $a+b$ и проекциями катетов на гипотенузу, равными a и b. Согласно упомянутому факту, высота этого треугольника будет иметь длину $\sqrt{ab}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Вспомните, что гипотенуза является диаметром описанной окружности прямоугольного треугольника. Какие подобные треугольники вы можете указать, если в прямоугольном треугольнике проведёте высоту к гипотенузе?*

$\boxed{7}$ Дан отрезок длины 1. С помощью циркуля, линейки и результатов предыдущей задачи постройте отрезки длины: **а)** $\sqrt{6}$; **б)** $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Решение. Воспользуемся предыдущей задачей и тем, что: **а)** $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$; **б)** $\sqrt{\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$. А отрезки длины $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ мы строить умеем (см. задачу 1). $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Воспользуйтесь предыдущей задачей.*

$\boxed{8}$ Даны отрезки длины a, b, c. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\dfrac{ab}{c}$. Подсказка: воспользуйтесь подобными треугольниками.

Решение. Возьмём какой-нибудь прямой угол с вершиной O. На одной из его сторон отметим точку A, а затем отметим точку C на отрезке OA так, чтобы $OC = c$, $OA = a$. На другой стороне угла отметим точку B так, чтобы $OB = b$. Проведем через точку A прямую, параллельную BC. Если M — точка ее пересечения с лучом OB, то отрезок BM — искомый (это следует из подобия треугольников AOM и COB). $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте на сторонах прямого угла отложить данные в условии отрезки. Воспользуйтесь подобием.*

Самым сильным школьникам можно дать следующую задачу (после решения всего листка):

$\boxed{9}$ (*) Даны отрезки с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и рациональные числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (некоторые из них могут быть отрицательными). С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длины $\sqrt{|q_1a_1^2 + q_2a_2^2 + \ldots + q_na_n^2|}$.

Решение. Поменяв, если надо, знаки у всех q_i, можно считать, что длина искомого отрезка равна $\sqrt{q_1a_1^2 + q_2a_2^2 + \ldots + q_na_n^2}$. Перенумеровав, если надо, заданные числа, можно считать, что $q_1, \ldots, q_k \geqslant 0, q_{k+1}, \ldots, q_n < 0$. Обозначим $b_i = \sqrt{|q_i|} \cdot a_i$, тогда длина искомого отрезка будет равна $\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_k^2 - b_{k+1}^2 - \ldots - b_n^2}$. Гипотенуза треугольника с катетами b_1, b_2 равна $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$; гипотенуза треугольника с катетами $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, b_3 равна $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, и т. д.; таким способом построим отрезки с длинами $\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_k^2}$ и $\sqrt{b_{k+1}^2 + \ldots + b_n^2}$. Теперь строим прямоугольный треугольник с гипотенузой $\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_k^2}$ и катетом $\sqrt{b_{k+1}^2 + \ldots + b_n^2}$; по теореме Пифагора его второй катет и будет искомым отрезком. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

–Подумайте над следующими вопросами:

- *Как раскрыть модуль?*
- *Как построить отрезок длины* $\sqrt{|q_i|} \cdot a_i$*?*
- *Если даны отрезки длин* $a > b$*, как построить отрезок длины* $\sqrt{a^2 - b^2}$*?*

Листок 6. Пифагоровы треугольники

Определение. Прямоугольный треугольник, длины всех сторон которого выражаются целыми числами, называется *пифагоровым треугольником.*

Определение. Набор натуральных чисел (a, b, c) называется *пифагоровой тройкой,* если он удовлетворяет равенству $a^2 + b^2 = c^2$. Другими словами, пифагорова тройка — это набор длин сторон некоторого пифагорова треугольника.

В начале занятия напомните школьникам про арифметику остатков: если $a = a_1m + r_a$, $b = b_1m + r_b$, то $a + b$ делится на m с таким же остатком, как $r_a + r_b$, а ab — с таким же остатком, как r_ar_b.

Полезно также напомнить, как решать в целых числах уравнения типа $x^2 - y^2 = 15$ (раскладываем левую и правую часть на два целочисленных множителя и приравниваем всевозможными способами).

Теперь можно дать определение пифагорова треугольника и пифагоровой тройки, а также привести самые известные примеры: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Зная длины двух сторон пифагорова треугольника, найдите длину третьей стороны и выясните, какая из сторон является гипотенузой:
а) 3 и 5; **б)** 24 и 25; **в)** 8 и 15; **г)** 5 и 13; **д)** 9 и 41.

Решение. Берём два данных числа и проверяем, является ли сумма или разность их квадратов квадратом целого числа. Если является сумма — это были длины катетов, если разность — это были гипотенуза и катет.
Ответы: **а)** 4 (гипотенуза 5); **б)** 7 (гипотенуза 25); **в)** 17 (она же и гипотенуза); **г)** 12 (гипотенуза 13); **г)** 40 (гипотенуза 41). □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Примените теорему Пифагора. Учтите, что данные числа могут быть не только катетами. Будут ли полученные числа квадратами целых чисел?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Приведите пример пифагорова треугольника с заданной длиной гипотенузы:
а) 15; **б)** 39; **в)** 100; **г)** 289.

Решение. Идея: берем подходящий прямоугольный треугольник из предыдущей задачи и удлинняем все стороны в одно и то же целое число раз.
Ответы: **а)** 9, 12, 15; **б)** 15, 36, 39; **в)** 60, 80, 100; **г)** 136, 255, 289. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте взять прямоугольный треугольник из предыдущей задачи и умножить все стороны на одно и то же целое число.*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что пифагоровых троек бесконечно много.

Решение. Берем любую пифагорову тройку и умножаем на 2, 3, 4 и т. д. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте взять любую пифагорову тройку. Попробуйте умножить все её компоненты на любое целое числое. Будет ли полученная тройка чисел пифагоровой?*

$\boxed{4}$ **а)** Существуют ли равнобедренные пифагоровы треугольники?
б) Существуют ли пифагоровы треугольники с острым углом 30°?

Решение. **а) Нет**: если катет равен $a \in \mathbb{N}$, то гипотенуза равна $a\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.
б) Нет: если катет против угла в 30° равен $a \in \mathbb{N}$, то по теореме Пифагора второй катет $a\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте предположить, что существуют пифагоровы треугольники с данными условиями. Пусть гипотенуза равна а, тогда чему равны катеты?*

$\boxed{5}$ Может ли пифагорова тройка состоять из трёх нечётных чисел?

Решение. Нет: если оба катета нечётны, то по теореме Пифагора гипотенуза чётна. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Предположите, что катеты нечётны. Что можно сказать про гипотенузу?*

$\boxed{6}$ **а)** Какие остатки от деления на 4 могут давать квадраты целых чисел?
б) Могут ли оба катета пифагорова треугольника иметь нечётные длины?
в) Докажите, что площадь пифагорова треугольника всегда выражается целым числом.

Решение. **а)** 0 (для квадрата чётного числа) или 1 (для квадрата нечётного числа).
а) Нет, иначе квадрат гипотенузы будет давать остаток 2 при делении на 4, что противоречит пункту а).
а) Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, а из пункта б) следует, что это будет целое число. $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Что такое остаток от деления? Что происходит с остатком при возведении числа в квадрат? Посмотрите на остатки при делении на 4 гипотенузы. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?*

$\boxed{7}$ В некотором пифагоровом треугольнике длины сторон — взаимно простые числа (такой пифагоров треугольник называется *примитивным*). Докажите, что длина гипотенузы нечётна, а длины катетов — разной чётности.

Решение. Ровно две чётные стороны у пифагорова треугольника быть не может (тогда и третья сторона была бы чётной), а оба катета нечётными быть не могут по предыдущей задаче. Значит, катеты разной чётности, а гипотенуза, следовательно, нечётна. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Может ли быть ровно две чётные стороны у Пифагорова треугольника? А оба катета нечётными? Что отсюда следует?*

$\boxed{8}$ Сколько существует пифагоровых треугольников, в которых один из катетов равен: **а)** 7; **б)** 15; **в)** 1; **г)** 4; **д)** 6?

Подсказка: составьте и решите уравнение в целых числах с помощью теоремы Пифагора.

Решение. Воспользуйтесь подсказкой и аккуратно решите уравнение в целых числах. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте составить уравнения в целых числах. Например,* $x^2 + 7^2 = y^2$.

$\boxed{9}$ Докажите, что для любого нечётного числа, кроме 1, существует пифагоров треугольник, в котором длина одного из катетов равна этому числу. Какие из этих треугольников заведомо не подобны друг другу?

Решение. Составляем уравнение в целых числах, как в предыдущей задаче. Для простого числа в правой части оно всегда имеет решение. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте, опять же, как и в предыдущей задаче, составить уравнение в целых числах. Попробуйте сделать гипотенузу простым числом.*

$\boxed{10}$ Докажите, что существует бесконечно много пифагоровых треугольников, не подобных друг другу.

Решение. Берём треугольники, у которых длины одного из катетов выражаются попарно различными простыми числами. В силу предыдущей задачи они не подобны друг другу. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте взять треугольники, у которого длины одного из катетов выражаются попарно различными простыми числами. Попробуйте применить*

предыдущую задачу.

$\boxed{\textbf{11}}$ Докажите, что в пифагоровом треугольнике: **а)** длина одного из катетов делится на 3; **б)** длина одной из трёх сторон делится на 5; **в)** произведение длин катетов делится на 12.

Решение. **а)** Квадрат натурального числа дает остаток 0 или 1 при делении на 3. Если оба катета не делятся на 3, то квадрат гипотенузы дает остаток 2 при делении на 3, чего быть не должно.
б) Рассуждаем с остатками на 5 аналогично предыдущему пункту.
в) Длина одного из катетов делится на 3 (по пункту а). Если все стороны чётны, то произведение катетов, очевидно, делится на 4. Если один катет чётный, а другой нечётный, то из рассмотрения остатков от деления квадрата на 4 всё и вытекает. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Посмотрите на остатки от деления на 3. Что произойдёт, если оба катета не делятся на 3? Аналогично с остатками от деления на 5. В последнём пункте примените пункт а) и посмотрите на различные случаи чётности катетов.*

В конце занятия можно сообщить школьникам (без доказательства) следующий факт.

Теорема. *Все пифагоровы тройки задаются* ***формулами Евклида****:*

$$a = k(m^2 - n^2),\ b = k(2mn),\ c = k(m^2 + n^2),$$

где m, n, k *— натуральные числа,* $m > n$, *число* $m - n$ *нечётно и НОД*$(m, n) = 1$.

Листок 7. Равные площади

В начале занятия напомните школьникам понятие площади. Можно не давать строгого определения; главное — сказать, что а) равные фигуры имеют равные площади и б) площадь объединения двух непересекающихся фигур равна сумме их площадей. Полезно вспомнить формулы площади треугольника, параллелограмма и трапеции и напомнить идею их доказательства.

Разберите такие задачи (обратите внимание школьников, что результаты этих задач могут быть полезны при решении задач листочка, поэтому их стоит записывать):

• Докажите, что медиана делит треугольник на два равных по площади треугольника.

Решение. У этих треугольников общая высота (опущенная из той же вершины, что медиана исходного треугольника) и равные основания (по определению медианы). Значит, из формулы площади треугольника следует, что площади этих треугольников равны. □

• Пусть K — точка на стороне AB треугольника ABC, причём $AK : KB = m : n$. Докажите, что $S(\Delta CAK) : S(\Delta CBK) = m : n$.

Решение. Решается аналогично предыдущей задаче. □

• Дан треугольник ABC. Точки M и N лежат на лучах AB и AC соответственно, причём $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что

$$\frac{S(\Delta AMN)}{S(\Delta ABC)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}.$$

Решение. Пусть $m < n,\ p < q$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда точка M лежит на отрезке AB, а точка N — на отрезке AC. Рассмотрим треугольник AMC. В силу предыдущей задачи

$$\frac{S(\Delta AMC)}{S(\Delta ABC)} = \frac{m}{n} \quad \text{и} \quad \frac{S(\Delta AMN)}{S(\Delta AMC)} = \frac{p}{q}.$$

Перемножая эти два равенства, получим требуемое. □

$\boxed{1}$ В трапеции с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что: **а)** $S(\Delta ABC) = S(\Delta BCD)$; **б)** $S(\Delta AOB) = S(\Delta COD)$.

Решение. **а)** У этих треугольников равные высоты (они равны высоте трапеции) и общее основание. **б)** $S(\Delta AOB) = S(\Delta ABC) - S(\Delta BOC) = S(\Delta BCD) - S(\Delta BOC) = S(\Delta COD)$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Чему равна площадь треугольника? Зависит ли она он того, какую высоту и основание мы выберем для подсчёта?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ В треугольника ABC проведена биссектриса BL.

а) Докажите, что $S(\Delta ABL) : S(\Delta BCL) = AL : CL = AB : BC$.

б) Найдите AB, если $BC = 9$, $AL = 7{,}5$, $CL = 4{,}5$.

в) Найдите LC, если $AB = 30$, $AL = 20$, $BC = 16$.

Решение. **а)** Следует из задач двух последних задач, разбираемых в начале занятия. С помощью пункта а) решаются пункты б) и в): **б)** $AB = AL \cdot BC : CL = \mathbf{15}$. **в)** $LC = BC \cdot AL : AB = \mathbf{10\frac{2}{3}}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Попробуйте применить задачи, которые разбирались в начале занятия. Затем попробуйте применить пункт а).*

$\boxed{\mathbf{3}}$ Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка O. Докажите, что

$$S(\Delta AOB) + S(\Delta COD) = \frac{1}{2}S(ABCD) = S(\Delta BOC) + S(\Delta AOD).$$

Решение. В треугольниках AOB и COD имеем $AB = CD$ по свойству параллелограмма (и вообще эти треугольники равны, как нетрудно доказать), а их высоты, опущенные из вершины O, также равны и вместе образуют высоту параллелограмма. Используя формулы площади параллелограмма и треугольника, получим первое равенство, аналогично доказывается и второе. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Что можно сказать про треугольники AOB и COD? Чему равны площади параллелограмма и треугольника?*

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Вершины одного квадрата расположены на сторонах другого и делят эти стороны в отношении $1 : 2$, считая по часовой стрелке. Найдите отношение площадей квадратов.

б) Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении $3 : 1$ по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

Решение. Условие стоит пояснить, нарисовав чертеж на доске — вопросы наверняка будут.

а) Пусть вершины меньшего квадрата делят стороны большего квадрата на отрезки длины x и $2x$, тогда сторона большего квадрата равна $3x$. Большой квадрат делится на 5 частей: маленький квадрат и четыре равных друг другу прямоугольных треугольника. Площадь каждого из этих треугольников равна x^2, а площадь большого квадрата равна $9x^2$. Поэтому в силу аддитивности площади площадь маленького квадрата равна $9x^2 - 4x^2 = 5x^2$, то есть отношение площадей квадратов равно $\mathbf{9:5}$. Задачу можно решать и с помощью теоремы Пифагора (впрочем, она доказывается как раз с помощью такого же рассуждения).

б) Площадь каждого из треугольников с двумя вершинами в отмеченных точках и третьей вершиной в вершине исходного треугольника равна $\frac{3}{16}$ (это следует из задачи 20.0). Значит, по свойству аддитивности площадей площадь треугольника с тремя вершинами в отмеченных точках равна $1 - 3 \cdot \frac{3}{16} = \mathbf{\frac{7}{16}}$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Что можно сказать про площади частей, на которые разбит больший квадрат? А про площади треугольников, на который разбит больший треугольник и с вершиной в вершине исходного треугольника?*

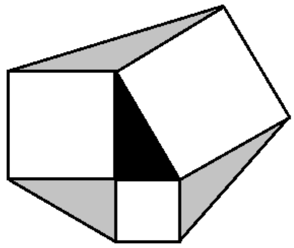

Рис. 1.

$\boxed{\mathbf{5}}$ На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты («пифагоровы штаны»). Их вершины соединены так, как показано на рис. 1. Докажите равенство площадей серых треугольников.

Решение. На сторонах самого большого из трёх квадратов как на гипотенузах можно построить 4 треугольника, равных закрашенному, так, чтобы они все оказались внутри квадрата и не пересекались (вспомните обычное доказательство теоремы Пифагора!). Большой квадрат при этом разобьется на четыре таких треугольника и ещё маленький квадратик. Ну вот, а теперь, когда все это нарисовано, становится очевидно, что площадь каждого из серых треугольников равна площади черного треугольника: у них есть равные основания и равные высоты, опущенные на эти основания.

Разумеется, можно придумать и много других решений этой задачи. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Как доказывается теорема Пифагора? Попробуйте в самом большом квадрате построить 4 треугольника как на гипотенузах.*

$\boxed{6}$ **а)** Точки K, L, M, N — середины сторон параллелограмма $ABCD$. Прямые DK, BM, AL, CN ограничивают маленький параллелограмм. Найдите отношение площадей параллелограммов. **б)** В выпуклом четырёхугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рис. 2. Докажите, что площадь чёрного четырёхугольника равна сумме площадей серых треугольников.

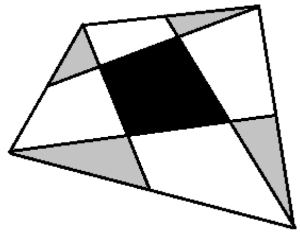

Рис. 2.

Решение. **а)** Пусть прямая BM пересекает отрезки AL и CN соответственно в точках E и F, а прямая DK — соответственно в точках G и H. Тогда $EFHG$ — параллелограмм, $BE = EF = GH = DH = 2FM$ (например, по свойству средней линии). Кроме параллелограмма, образуется ещё четыре треугольника и четыре трапеции. Пользуясь формулами площади треугольника, параллелограмма и трапеции, можно вывести, что площади трапеций равны по $\frac{3}{4}S(EFGH)$, площади треугольников — по $\frac{1}{4}S(EFGH)$. Отсюда получим, что $S(ABCD) = 5S(EFGH)$, а значит, искомое отношение площадей равно $\mathbf{1 : 5}$.
б) Введем обозначения аналогично пункту а). $S(KBC) = \frac{1}{2}S(ABC)$, $S(LCD) = \frac{1}{2}S(BCD)$, $S(AMD) = \frac{1}{2}S(ACD)$, $S(ABN) = \frac{1}{2}S(ABD)$ в силу задачи, разобранной в начале занятия. Отсюда

$$S(KBC) + S(BCD) + S(LCD) + S(ABN) =$$
$$= \frac{1}{2}(S(ABC) + S(ACD) + S(ACD) + S(ABD)) = S(ABCD).$$

С другой стороны, по формуле включений-исключений

$$S(ABCD) = S(KBC) + S(LCD) + S(AMD) + S(ABN) -$$
$$- S(\text{серых треугольников}) + S(\text{чёрного четырёхугольника}),$$

откуда $-S(\text{серых треугольников}) + S(\text{чёрного четырёхугольника}) = 0$, что и требовалось. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте вычислить площади треугольников и трапеций, на которые разбит исходный параллелограмм.*

$\boxed{7}$ Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (см. рис. 3). Докажите, что сумма площадей белых частей равна сумме площадей серых частей.

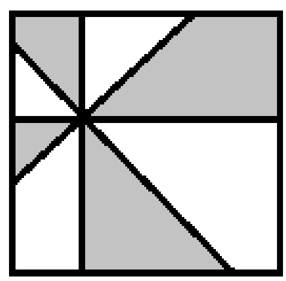

Рис. 3.

Решение. Продолжим прямые, параллельные диагоналям квадрата, до пересечения с продолжениями его сторон. Получится много равнобедренных прямоугольных треугольников, которые попарно равны. Покрасим достроенные части этих треугольников так, чтобы каждые два равных треугольника были разных цветов. Теперь очевидно, что сумма площадей белых частей равна сумме площадей серых частей. А достроенные треугольнички (их четыре) тоже разбиваются на две пары равных, причём в каждой паре треугольнички разноцветные. Поэтому сумма площадей белых частей равна сумме площадей серых частей и в исходном разбиении. Можно решать задачу и аналитически — с помощью прямоугольной системы координат. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Попробуйте продолжить стороны, параллельные диагоналям квадрата. Какие равнобедренные треугольники вы видите? Что можете сказать про их площади?*

Комбинаторика

Листок 8. Сложить или умножить?

В начале занятия разберите следующие задачи:

- На рынке продаются яблоки пяти сортов, груши трёх сортов и сливы двух сортов. Сколько способов купить: **а)** яблоки и груши; **б)** яблоки, груши и сливы; **в)** фрукты двух видов, если фрукты каждого вида покупаются лишь одного сорта?

  Решение. **а)** У нас есть пять сортов яблок, и для каждого из них мы можем выбрать любой из трёх сортов груш (тут следует нарисовать соответствующую схему). Таким образом, получаем $5{\cdot}3 = 15$ способов. **б)** Способов выбрать яблоки и груши, как нам уже известно, 15. К любой комбинации «яблоки + груши» можно добавить любой из 2 сортов слив, соответственно всего способов $15 \cdot 2 = 30$. **в)** Для начала определимся, какие именно фрукты мы будем покупать: яблоки и груши, груши и сливы или сливы и яблоки. Выбрать яблоки и груши можно 15 способами, груши и сливы $3 \cdot 2 = 6$ способами, сливы и яблоки $2 \cdot 5 = 10$ способами. Соответственно, всего $15+6+10 = 31$ способ. □

- **а)** Сколько существует пятизначных чисел? **б)** А сколько пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (как, например, 12321 и 25852)?

  Решение. **а)** Что такое пятизначное число? Это последовательность из 5 цифр, первая из которых не 0, а остальные любые. То есть на первом месте может быть любая из 9 цифр, на втором, вне зависимости от того, что на первом месте, — любая из 10, на третьем, четвёртом и пятом — тоже любая из 10. Таким образом получаем $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000$ пятизначных чисел.
  Разобрав эту задачу, спросите у школьников для проверки, сколько существует трёхзначных или четырёхзначных чисел. **б)** Если число слева направо и справа налево читается одинаково, то первая цифра — такая же, как последняя, а вторая — такая же как предпоследняя. При этом первая цифра какая угодно, кроме 0, а вторая и третья цифра могут быть любыми. То есть таких чисел столько же, сколько и обычных трёхзначных чисел, а именно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$. Спросите у школьников, сколько существует аналогичных шестизначных чисел (их столько же). □

После этого сформулируйте следующие 2 правила:
Правило суммы. Если объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами, то выбор «A или B» можно осуществить $m+n$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать m способами и при каждом таком выборе объект B можно выбрать n способами, то выбор «A и B» можно осуществить $m \cdot n$ способами.
Например, в решении задачи про фрукты (пункт в) мы должны были выбрать (яблоки ***и*** груши) ***или*** (груши ***и*** сливы) ***или*** (сливы ***и*** яблоки), отсюда получаем $5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Чтобы доехать из дома на завод, токарь Петрович едет сначала на маршрутке от дома до метро, потом на метро (с пересадками), а потом на трамвае от метро до завода. От дома до метро ходят пять разных маршруток, от метро до завода — три трамвая, а на метро можно ехать по кольцу или через центр. Сколько разных маршрутов на работу и обратно может придумать Петрович, чтобы нёмного разнообразить свою жизнь?

Решение. От дома до метро 5 способов доехать, для любого из них можем выбрать 2 варианта поездки на метро и для любой комбинации поездок можем выбрать любой из трёх трамваев, таким образом получаем $5 \cdot 2 \cdot 3 = 60$. То есть Петрович имеет 60 способов доехать от дома до завода и столько же обратно. Всего же маршрутов $60 \cdot 60 = 3600$, так как для любого из 60 путей на работу можно выбрать любой из 60 путей обратно. □

○ `Школьник говорит, что ответ 60.`
– *Под маршрутом понимается весь путь туда и обратно.*
○ `Школьник складывает 60 и 60, вместо того, чтобы умножать.`
– *Петровичу нужно ехать от дома до завода или обратно? А может, всё же и туда, и обратно? Что тогда нужно делать согласно правилу?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Токарь Петрович работает на станке, на котором есть четыре двухпозиционных переключателя. Сколько всего режимов работы у этого станка? **б)** Петрович не первый год мечтает о более современном станке, у которого помимо четырёх двухпозиционных переключателей было бы ещё три трёхпозиционных. Сколько режимов работы у станка мечты Петровича?

Решение. **а)** Каждый из переключателей может быть в одном из двух режимов, то есть для любого из двух режимов первого можно выбрать любой из двух второго, и т. д.. В итоге получаем $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. **б)** Аналогично $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 16 \cdot 27 = 432$. □

○ `Школьник не понимает, что такое двухпозиционный и трёхпозиционный переключатель.`
–*В качестве примера двухпозиционного переключателя подходит привычный всем выключатель света: у него два положения (вкл./выкл.). А у трёхпозицион-*

ного переключателя положений три (например, такой переключатель может управлять скоростью вращения вентилятора).

∘ `Школьник говорит, что ответ в пункте а) такой:` $2 \cdot 4 = 8$.

–*Почему ты решил перемножить эти числа? 4 — это количество переключателей, мы выбираем их? А какие объекты мы выбираем и сколькими способами можно их выбрать?*

$\boxed{3}$ **а)** Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 5? **б)** Сколько существует натуральных чисел от 0 до 999999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

Решение. **а)** Числа, делящиеся на 5, — это числа, оканчивающиеся на 0 или 5. Остальные цифры могут быть любыми. Таким образом, на первом месте может быть всё, кроме 0, то есть 9 вариантов, на втором, третьем, четвёртом и пятом — любая цифра, то есть 10 вариантов, на последнём месте — 0 или 5, то есть 2 варианта. Всего получаем $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180000$ вариантов. **б)** Посчитаем, сколько таких шестизначных чисел: на первом месте может быть любая цифра, кроме 0, то есть 9 вариантов, на втором месте — любая, кроме первой (какой бы ни была эта первая), то есть тоже 9 вариантов, на третьем месте — любая, кроме второй, и т. д. Получаем $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ чисел, аналогично пятизначных: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, четырёхзначных $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ и т. д. Однозначных чисел 10 (включая 0). Значит, всего получится $9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 10 = 597871$ чисел. Можно не заставлять школьников вычислять этот окончательный ответ. Сильных школьников можно просить оценить: таких чисел больше половины от всех рассматриваемых или меньше? □

∘ `Школьник не знает, что делать.`

–***а)*** *Каков признак делимости на 5? Как выглядят числа, делящиеся на 5? Какими могут быть их цифры, стоящие на первом, втором, последнём месте?* **б)** *Какой может быть вторая цифра, если известна первая? А вторая, если известны первые две? Если мы зафиксируем первую цифру, сколько будет способов выбрать вторую?*

∘ `Школьник умножает на 5, а не на 2 в пункте а).`

– *Что такое 5? Количество каких объектов оно означает?*

$\boxed{4}$ В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год (например, 09.12.2015 — двенадцатое сентября 2015 года). А в Европе и в России сначала пишут число, потом месяц и год (например, двенадцатое сентября 2015 года записывают так: 12.09.2015). Сколько в году дней, дату которых нельзя расшифровать однозначно, не зная, каким способом она написана?

Решение. Однозначно нельзя расшифровать даты, в которых день не больше 12, а месяц любой (за исключением тех 12 дат, где день и месяц совпадают: 01.01, 02.02, ..., 12.12). Таких дат $12 \cdot 12 - 12 = 132$. □

5 Семизначный телефонный номер называется *красивым*, если в нём чётные цифры чередуются с нечётными и нет нулей. Сколько всего существует красивых номеров?

Решение. Нечётных цифр 5, а чётных, кроме нуля — 4. Если номер начинается с чётной цифры, то на первом, третьем, пятом и седьмом местах имеет по 4 варианта, а на втором, четвёртом и шестом по 5, то есть таких номеров: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 32000$, если же номер начинается с нечётной цифры, то их $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 40000$. Значит, всего существует $32000 + 40000 = 72000$ красивых номеров. □

6 Надо послать 6 срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если для передачи писем можно послать трёх курьеров, причём каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Решение. Первое письмо можно дать любому из трёх курьеров, вне зависимости от этого второе письмо также можно дать любому из трёх, и т. д. Получаем, что всего способов: $3^6 = 729$. □

○ `Школьник считает, что ответ` $3 \cdot 6 = 18$.

–Почему ты перемножил эти числа? Ты выбираешь одно из 6 писем, а затем одного из 3 курьеров? А что ты выбираешь?

○ `Школьник не знает, что делать.`

–Если бы письмо было одно, сколько было бы способов? Теперь, когда мы определили кто отнесёт первое письмо, сколько есть вариантов для второго письма? Значит, сколько способов в случае двух писем?

7 Никанор поставил на смартфон четырёхзначный цифровой код разблокировки, а потом забыл его. Никанор помнит только, что в коде были числа 23 и 37. С какой попытки Никанор наверняка сможет подобрать код и разблокировать экран смартфона?

Решение. 23 и 37 могли быть в кодах, где встречается комбинация 237, и в кодах 2337 и 3723. Если встречается 237, то либо перед ней, либо после нее стоит любая из 10 цифр, то есть вариантов кода: $10 \cdot 2 = 20$. Таким образом Никанору, понадобится 22 попытки. □

○ `Школьник считает, что ему хватит двух попыток`

– Как ещё могут быть расположены цифры, чтобы при взгляде на них можно было увидеть как 23, так и 37?

$\boxed{8}$ Подобрав наконец код, Никанор решил, что цифры — это слишком сложно для него, и поставил на смартфон графический пароль. Теперь, чтобы разблокировать экран, надо в правильном порядке соединить ломаной какие-то четыре из изображенных на экране девяти точек (они расположены по кругу). Сколько попыток нужно, чтобы наверняка подобрать этот пароль, если: **а)** знать, какие точки соединять, но не знать, в каком порядке; **б)** не знать, какие точки соединять?

Решение. **а)** Есть 4 точки, которые нам нужно упорядочить. Сначала мы можем выбрать любую из четырёх точек, на второе место любую из оставшихся трёх, на третье любую из двух, в качестве кандидата на четвертое место останется всего одн точка, таким образом Никанору понадобится $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ попытки. bf б) Тут на первом месте может оказаться любая из девяти точек, на втором любая из оставшихся восьми и т.д. Всего $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ вариантов кода. □

∘ `Школьник не знает, что делать.`

– *Сколько способов выбрать первую точку? Если мы ее уже выбрали, сколько способов выбрать вторую?*

$\boxed{9}$ Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, а остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

Решение. Чтобы при переворачивании число не потеряло смысл, в нём должны быть только цифры 0, 1, 8, 6, 9. При переворачивании первая цифра переходит в последнюю, вторая — в восьмую, третья — в седьмую, четвёртая — в шестую, а пятая остается на своем месте. Значит, если цифры в таком числе с первой по четвертую — некоторые из 0, 1, 8, 6, 9, то цифры с шестой по девятую определяются однозначно. Так как пятая цифра остается на своем месте, то она может быть только 0, 1 или 8. Таким образом, на первых четырёх местах по 5 вариантов цифр, на пятом месте 3 варианта. Значит, всего таких чисел $5^4 \cdot 3 = 1875$. □

∘ `Школьник не знает, что делать.`

–*Если мы определим первую цифру, какими могут быть остальные? Сколькими способами можно её выбрать?*

∘ `Школьник говорит, что ответ` 5^5.

–*Действительно ли на всех местах может быть любая из этих 5 цифр? Какие места в числе переходят друг в друга? Что происходит, когда число переходит само в себя?*

$\boxed{10}$ Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две: **а)** разноцветных **б)** белых ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Решение. **а)** Чёрную ладью можно поставить на любое из 64 мест. Где бы она ни стояла, она бьёт 14 полей (7 по горизонтали и 7 по вертикали). То есть белую ладью можно поставить на любую клетку, кроме той, где стоит чёрная, и тех 14, что она бьёт. Таких клеток 49. Значит, всего способов $64 \cdot 49 = 3136$. **б)** Нам уже известно, что количество способов поставить две различные ладьи равно 3136. Каждому способу поставить 2 ладьи одного цвета соответствуют ровно два способа поставить на те же места две ладьи разных цветов. Соответственно, в пункте б) ответ в два раза меньше, чем в пункте а), а именно 1568. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– ***а)*** *Если чёрная ладья стоит на клетке a1, куда можно поставить белую? А если на любом другом месте — сколько клеток она бьёт? Сколько остается для белой ладьи?* ***б)*** *Что меняется, когда ладьи становятся одного цвета? Количество способов уменьшается или увеличивается? А почему? Насколько или во сколько раз оно уменьшается?*

Листок 9. Факториал!

В начале занятия следует ввести следующее

Определение. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называется *факториалом* числа n и обозначается $n!$ (читается «эн факториал»). Таким образом, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

И разобрать задачи:

- *Анаграммой* называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов: **а)** КОШКА; **б)** СМЕТАНА?

  Решение. **а)** На первое место можно поставить любую из пяти букв, на второе — любую из четырёх, и т. д. На пятое место останется только одна буква. Таким образом, количество анаграмм равно $5! = 120$. **б)** В этом слове 7 букв. Предположим, что две имеющиеся буквы А различны: есть A_1 и A_2. Тогда на первом месте может быть любая из 7 букв, на втором — любая из 6 и т.д. То есть всего вариантов было бы $7! = 5040$. Но в таком случае мы бы каждое слово посчитали дважды: например, слову СМЕТАНА соответствовали бы слова $CMETA_1HA_2$ и $CMETA_2HA_1$. Поэтому анаграмм, где A_1 и A_2 являются одной и той же буквой, в 2 раза меньше, а именно 2520. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Консьержка Клавдия Семёновна решила поменять в своем подъезде код домофона. Она хочет составить новый четырёхзначный код из цифр 1, 9, 4, 5. Сколько таких кодов можно составить, если: **а)** цифры могут повторяться; **б)** цифры не должны повторяться?

Решение. **а)** На первом, втором, третьем и четвёртом месте в данном случае может стоять любая из четырёх цифр, то есть количество вариантов $4^4 = 256$. **б)** На первом месте может стоять любая из 4 цифр, на втором — любая из ещё незадействованных трёх и т.д., получаем $4! = 24$ вариантов кода. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Клавдия Семёновна выращивает на подоконнике цветы. У неё есть синий, зеленый, коричневый и оранжевый горшки. Сколькими способами Клавдия Семёновна может расставить их в ряд на подоконнике? **б)** Синий горшок разбился, и Клавдия Семёновна купила вместо него ещё один оранжевый — точь-в-точь такой же, как у неё уже есть. Сколько способов расставить горшки на подоконнике теперь?

Решение. **а)** Самый левый горшок может быть синим, зелёным коричневым или оранжевым (это 4 варианта), следующий может быть любого из трёх оставшихся цветов, следующий — любого из двух оставшихся, и для последнего есть только один вариант. То есть всего способов: $4! = 24$. **б)** Любой ряд из четырёх горшков, где два оранжевых, зелёный и коричневый, мог получиться из ряда, где синим был какой-то из этих двух оранжевых, то есть из каких-то двух рядов предыдущего пункта. То есть возможных способов расставить горшки в два раза меньше, чем в предыдущем пункте, а именно 12. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

– *Больше или меньше способов расстановки стало у Клавдии Семёновны по сравнению с пунктом а)? Из каких рядов мог получиться ряд «оранжевый, оранжевый, зелёный, коричневый»? А ряд «оранжевый, зелёный, коричневый, оранжевый»? Во сколько раз уменьшилось количество способов расстановки по сравнению с пунктом а)?*

$\boxed{3}$ **а)** Сколькими способами можно расставить 8 одинаковых ладей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга (не стояли на одной вертикали или горизонтали)? **б)** А если все ладьи разные (скажем, пронумерованы)?

Решение. **а)** На каждой горизонтали может стоять не более 1 ладьи, если они не бьют друг друга. Всего горизонталей 8, ладей тоже, значит, на каждой стоит ровно по одной ладье. В каждой вертикали тоже стоит по одной ладье, значит, если ладья в первой горизонтали стоит на каком-то месте, то во второй горизонтали на этом месте ладьи быть уже не может. Тогда в первой горизонтали есть 8 клеток, куда можно поставить ладью, во второй — семь (все, кроме той, что на столбце с первой ладьей), в третьей строчке — 6, и т. д. Получаем $8! = 40320$ вариантов.
б) *Способ 1.* Сначала выберем где будут стоять ладьи: вариантов выбрать эти клетки, как нам уже известно, 8!. Теперь пронумеруем их: на клетку в первой строке можно поставить любую из 8 ладей, в клетку на второй строке любую из оставшихся 7 и т.д. Всего получаем 8! способов расставить ладьи на этих клетках. То есть всего вариантов $8! \cdot 8! = 8!^2 = 1\ 625\ 702\ 400$ (конечно, школьников необязательно заставлять вычислять ответ).
Способ 2. Первая ладья может стоять на любом из 64 мест. Второй ладье останется 7 строк и 7 столбцов, то есть 49 мест, третьей ладье останется 6 строк и 6 столбцов, то есть 36 мест, и т. д. Всего получаем $8^2 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 8!^2$. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте а).`

– *Как выглядит доска с 8 ладьями, которые не бьют друг друга? Может ли в одной строчке быть 2 ладьи? А что будет, если в некоторой строчке не будет ладей? Если мы уже решили где стоит ладья в первой строчке, то что можно сказать про остальные?*

○ `Школьник не знает, что делать в пункте Б).`

–*Если мы уже расставили ладьи без номера, сколькими способами мы теперь можем их пронумеровать?*

$\boxed{\mathbf{4}}$ *Анаграммой* называется произвольное слово, полученное из данного слова перестановкой букв. Сколько анаграмм можно составить из слов: **а)** ТОЧКА; **б)** ПРЯМАЯ; **в)** МОЛОКО; **г)** БИССЕКТРИСА?

Решение. **а)** На первое место можно поставить любую из 4-х букв, на второе — любую из 3-х и т.д. Всего получаем 4!=24 анаграммы. **б)** Если бы буквы Я были различны, то было бы 6! различных анаграмм, но так как они одинаковы, их в два раза меньше, то есть $6! : 2 = 360$. **в)** Если бы вместо букв О были буквы O_1, O_2, O_3, то анаграмм было бы 6!, но каждая анаграмма с обычными буквами О порождает 3! анаграмм с буквами O_1, O_2, O_3 (так как O_1 можно поставить на любое из трёх мест для буквы О, O_2 — на любое из двух оставшихся, и тогда для O_3 останется последняя буква О). Таким образом, получаем, что каждое слово мы посчитали 3! раз, то есть анаграмм с обычными буквами О $6! : 6 = 5! = 120$. **г)** Если бы буквы С и И были различны, то имелось бы 11! анаграмм. Если теперь предположить, что буквы И одинаковы, а С различны, то получим в 2 раза меньше слов, то есть $11! : 2$. Наконец, если ещё учесть, что буквы С тоже различны, то получаем $11! : 2 : 3! = 3\,326\,400$. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте б).`

–Сколько было бы вариантов, если бы одну из букв Я мы заменили на букву Ф? На сколько меньше слов в нашем случае?

○ `Школьник делит на 3 в пункте в).`

–Почему ты делишь на 3? Нужно делить на количество букв или на что-то другое? На что нужно делить? Сколькими способами можно переставить буквы О в слове МОЛОКО?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Упростите выражения: **а)** $k! \cdot (k+1)$; **б)** $k! : (k-1)!$; **в)** $(k+2)! : k!$.

Решение. **а)** $k! \cdot (k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) = (k+1)!$.
б) $k! : (k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k : 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) = k$.
в) $(k+2)! : k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k) = (k+1) \cdot (k+2)$. □

$\boxed{\mathbf{6}}$ Какое из чисел $5! + 3!$ и $8!$ больше и во сколько раз?

Решение.

$$8! : (5! + 3!) = 8! : (3! \cdot 4 \cdot 5 + 3!) = 8! : (3!(4 \cdot 5 + 1)) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! : (3! \cdot 21) =$$
$$= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 : (3 \cdot 7) = 8 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 320.$$

□

$\boxed{\mathbf{7}}$ Правда ли, что: **а)** $9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9! = 10!$; **б)** $(k+l)! = k!+l!$; **в)** $(k+1)! = k! + 1$; **г)** $(k/2)! = k!/2$; **д)** $(k \cdot l)! = k! \cdot l!$; **е)** $k! \cdot (k+1) = (k+1)!$; **ж)** $(k+l)! = k! \cdot l!$; **з)** $k! : l! = (k : l)!$; **и)** $k! : l! = (k-l)!$; **й)** $(k!)! = (k!)^2$? Если правда, докажите, если нет — приведите контрпример.

Ответ. **а) да, б) нет, в) нет, г) нет, д) нет, е) да, ж) нет, з) нет, и) нет, й) нет.**

Решение. Везде, где ответ нет, почти любые пары натуральных чисел будут контрпримером. **а)** $9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9!+9! = 9! \cdot 10 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 = 10!$
е) $k! \cdot (k+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) = (k+1)!$. $\square$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Докажите, что уравнение $x! \cdot y! = z!$ имеет бесконечное число решений в натуральных числах, для которых $x, y \neq 1$.

Решение. Возьмём $y = x! - 1$. Тогда $x! \cdot (x! - 1)! = (x!)!$ $\square$

Листок 10. От порядка к беспорядку

На этом занятии школьники должны самостоятельно разбираться, что к чему, последовательно решая задачи от простых к сложным. В начале занятия можно в качестве напоминания разобрать некоторые задачи с двух предыдущий занятий. Через 10–15 минут после выдачи новых задач стоит разобрать первую задачу, если будут школьники, которые её к тому моменту ещё не решили.

$\boxed{1}$ **а)** Сколько способов сложить 3 книги в стопочку? **б)** Сколько способов выбрать из 15 книг выбрать три и сложить их в стопочку? **в)** Сколько способов из 15 книг выбрать 3?

Решение. **а)** На первое место можно взять любую из трёх книг, на второе — любую из двух, на третье останется только одна. Итого $3! = 6$ способов. **б)** На первое место кладём любую из 15 книг, на второе — любую из оставшихся 14, на третье — любую из оставшихся 13. Итого $15 \cdot 14 \cdot 13 = 780$ способов. **в)** При подсчёте в предыдущем пункте каждый способ просто выбрать 3 книги (без учёта их порядка) был посчитан столько раз, сколько способов сложить 3 книги в стопочку, то есть $3!=6$ раз. Поэтому на вопрос пункта в) ответ такой: $15 \cdot 14 \cdot 13 : 3! = 130$. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте в).`

– *Сколько из одного выбора 3 книг без учёта порядка может получится стопочек? Сколько у нас всевозможных стопочек из 3 книг?*

$\boxed{2}$ Сколько наборов букв можно получить перестановкой из слов:

а) ААУ; **б)** АААУУ; **в)** ААААУУ; **г)** ААААУУУ; **д)** $A\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **е)** $AA\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$;

ж) $\underbrace{A\ldots A}_{k}\underbrace{Y\ldots Y}_{n-k}$; **з)** $\underbrace{A\ldots A}_{n-k}\underbrace{Y\ldots Y}_{k}$; **и)** $\underbrace{A_1\ldots A_1}_{k_1}\underbrace{A_2\ldots A_2}_{k_2}\ldots\underbrace{A_m\ldots A_m}_{k_m}$?

Решение. **а)** Тут в любом случае будет 3 буквы: вопрос только том, где будет находиться буква У. А она может находиться на любом из трёх мест.

б) Тут будет 5 букв, набор определяется положением букв У. Первую можно поставить на любое из 5 мест, тогда вторая может находится на любом из оставшихся 4. Но при таком подходе мы каждый способ посчитали дважды (нет разницы, поставить «первую» букву У на 1 место, а «вторую» на 3 или наоборот), поэтому всего слов $4 \cdot 5 : 2 = 10$.

в) То же самое, только букв 6. Первую У ставим на любое из 6 мест, вторую на любое из 5, слова посчитаны дважды, поэтому делим на 2. Получаем $6 \cdot 5 : 2 = 15$ наборов.

г) Тут 7 букв, среди которых три буквы У. «Первую» можно поставить на любое из 7 мест, «вторую» — на любое из оставшихся 6, «третью» на любое из оставшихся 5. Но поскольку нет разницы между «первой», «второй» и «третьей» буквами,

то каждое слово мы посчитали столько раз, сколько можно переставить между собой эти буквы У, то есть 3!. Значит, ответ на вопрос этого пункта такой: $7 \cdot 6 \cdot 5 : 3! = 21$.
д) Есть $k+1$ место, набор определяется тем, куда мы поставим букву А, то есть вариантов $k+1$.
е) Есть $k+2$ места, набор определяется тем, куда мы поставим буквы А. Если бы они были различны, то вариантов было бы $(k+2) \cdot (k+1)$. Но поскольку эти буквы одинаковы, способов в 2 раза меньше, то есть $(k+2) \cdot (k+1) : 2$.
ж) Есть n букв, набор определяется местами, в которые мы поставим k букв А. Предположим, что они все различны. Тогда первую можно поставить на любое из n мест, вторую на любое из оставшихся $(n-1)$ мест и т. д. Последнюю можно было бы поставить на любое из $(n-k+1)$ мест. Но, так как буквы А одинаковы, каждый набор посчитан столько раз, сколько способов переставить буквы А, то есть $k!$. Таким образом, получаем всего $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) : k!$ наборов.
з) Тут способов столько же, сколько и в предыдущем пункте. Однако, если так же расставлять буквы А, которых теперь уже $n-k$, то получим ответ $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-(n-k)+1) : (n-k)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (k+1) : (n-k)!$, который, как несложно заметить, равен ответу в предыдущем пункте и равен $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
и) Обозначим за n сумму всех k_i. Тогда, пользуясь пунктом ж), подсчитаем, что количество способов расставить на n местах k_1 букв A_1 равно $\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$. Теперь на оставшихся $(n-k_1)$ местах расставить k_2 букв A_2 будет $\frac{(n-k_1)!}{(k_2)!(n-k_1-k_2)!}$. Значит, число способов расставить k_1 букв A_1, а затем k_2 букв A_2 будет равно $\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}$. Расставляя аналогично буквы $A_3, A_4, \ldots, A_{m-1}$ получим $\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{m-1}!(n-k_1-k_2\ldots-k_{m-1}!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_{m-1}!k_m!}$ способов. □

○ `Школьник не знает, что делать в пункте ж).`
–Представь, что все буквы А занумерованы. Сколько тогда было бы наборов? Сколькими способами можно переставить занумерованные буквы У?
○ `Школьник не знает, что делать в пункте и).`
–Сколько тут мест для букв? Сколькими способами можно расставить буквы A_1 на эти места? Сколькими способами можно раставитьA_2 на оставшиеся места? Сколько всего получается способов расставить A_1 и A_2?

$\boxed{3}$ Сколькими способами можно: **а)** из 5 ребят выбрать двоих; **б)** из 6 ребят выбрать четверых; **в)** из 7 ребят выбрать троих; **г)** из n ребят выбрать k?

Решение. **а)** Первым можно выбрать одного из 5, вторым одного из 4 оставшихся, но нет разницы в каком порядке выбирать, значит, всего способов $4 \cdot 5 : 2 = 10$.
б) Первым можно выбрать одного из 6 ребят, вторым — одного из пяти оставшихся, и т. д. Получим $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ способов поставить их в ряд. Каждому выбору

четвёрки соответствует 4! рядов из 4 человек (так как именно столько различных рядов можно составить из 4 человек). А значит, способов выбора в 4! раз меньше, чем рядов из 4 человек, то есть $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 : (4 \cdot 3 \cdot 2) = 5 \cdot 3 = 15$. **в)** Аналогично получаем $7 \cdot 6 \cdot 5 : 3! = 21$. **г)** Поставим этих k ребят в ряд: на первое место любого из n, на второе любого из $(n-1)$... на k-ое любого из $(n-k+1)$, то есть количество способов поставить их в ряд равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Для каждой выборки k ребят без учёта порядка существует $(k-1)!$ таких рядов. Значит, просто выбрать k человек из n будет $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) : k!$ способов. □

○ `Школьник не знает, что делать.`
– *Если бы мы ставили ребят в ряд, сколько получилось бы способов? А сколько способов поставить выбранных ребят в ряд?*

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, важен, называется *числом размещёний без повторений из n по k* и обозначается A_n^k (читается «а из эн по ка»).
Число способов сделать такой выбор, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

4 Докажите, что

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.}$$

Решение. Есть n предметов, из которых мы хотим выбрать k по порядку. Первый предмет мы можем выбрать n способами, второй — $(n-1)$ способами, ..., последний — $(n-k+1)$ способами. То есть всего способов выбрать k предметов будет $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k+1)$. Если домножить числитель и знаменатель на $k!$, получим $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, т. к. $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k+1) \cdot k! = n!$.
Теперь пусть порядок нам неважен. Для любого способа неупорядоченно выбрать k предметов существует $k!$ способов их упорядочить (k предметов можно поставить на первое место, $k-1$ предметов — на второе, и т.д.). Таким образом, неупорядоченных выборок в $k!$ раз меньше, чем упорядоченных, откуда и получаем формулу $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. □

○ `Школьник пришел к формуле` $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ `и не знает, что делать дальше.`
–*Чем твоя формула отличается от той, что в листочке? В ней не хватает знаменателя? А что если его создать искусственно, умножив и разделив правую часть на $k!$? Что теперь получилось в числителе?*

$\boxed{5}$ На плоскости отмечено 10 точек, и никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Раз никакие три точки не лежат на одной прямой, то любые три из них являются вершинами треугольника. Поэтому треугольников столько же, сколько способов выбрать из 10 точек три, то есть $C_{10}^3 = 10! : (7!3!) = 10 \cdot 9 \cdot 8 : 3! = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120$ треугольников. $\square$

$\boxed{6}$ Двенадцать инопланетян решили навестить знакомых с Земли. У них есть 4 тарелки разных цветов, в каждую из которых входит ровно трое. Сколько у инопланетян способов разместиться в этих тарелках?

Решение. Сначала выберем инопланетян в первую тарелку (количество способов это сделать равно C_{12}^3), потом во вторую наберем из оставшихся (C_9^3 способов), далее в третью из оставшихся шести инопланетян (C_6^3 способов) и в последнюю (C_3^3 способов). Всего получаем $C_{12}^3 \cdot C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{12! \cdot 9! \cdot 6! \cdot 3!}{9! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{12!}{(3!)^4} = 369\ 600$ способов. $\square$

$\boxed{7}$ Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой горизонтали шахматной доски?

Решение. Это частный случай формулы, которую мы вывели при решении задачи 2 и) (только вместо букв — фигуры). Получаем $8! \cdot (2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!) = 7! = 5040$ способов. $\square$

$\boxed{8}$ Сколько есть способов пройти из левой нижней клетки прямоугольника 5×9 в правую верхнюю, если можно ходить только вверх и вправо?

Решение. Нам в любом случае придется пройти 4 раза вверх и 8 раз вправо, чтобы добраться до верхнего правого угла. Маршруты отличаться будут только тем, в какой последовательности мы будем ходить. Всего нам нужно сделать 12 ходов и ровно 4 из них вверх, то есть количество маршрутов равно количеству способов выбрать какие четыре из 12 ходов будут вверх, что равно $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 = 55$ $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Сколько всего нам потребуется ходов вверх? А вправо? В каком порядке мы должны ходить влево и вправо?*

$\boxed{9}$ Сколько существует шестизначных чисел, в которых каждая цифра, начиная со второй, меньше, чем предыдущая?

Решение. В таком числе все цифры различны и, если мы знаем какие они, то их порядок единственен. Значит их столько же, сколько способов выбрать 6 цифр из 10, то есть $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210.$ $\square$

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Как устроены эти числа? Могут ли там быть 2 одинаковых цифры? Могут ли 2 различных таких числа состоять из одинаковых цифр? Сколько различных наборов цифр годится для такого числа?*

Листок 11. Много похожих задач

В начале следует пояснить, что понимается под одинаковостью задач. Например, задачи

- Сколько способов расставить 15 человек в хоровод?
- Сколько различных ожерелий можно сделать из 15 разноцветных бусинок?

одинаковы. Их суть сводится к следующему вопросу: Сколько способов расставить 15 различных объектов в круг?

На этом занятии следует поощрять детей за каждую найденную пару одинаковых задач.

Не решая задач, разбейте их на группы «одинаковых» задач. Объясните, как установить соответствие между задачами одной группы. Затем решите задачи каждой группы.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколько существует способов расставить 36 человек в шеренгу?
Тип задачи. Сколько способов упорядочить 36 объектов?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Сколько всего сторон и диагоналей у 36-угольника?
Тип задачи. Сколькими способами можно из 36 объектов выбрать 2? (Каждая сторона или диагональ задаётся двумя точками — вершинами 36-угольника.)

$\boxed{\mathbf{3}}$ Есть 36 разных конфет. Сколькими способами можно раздать их 36 девочкам?
Тип задачи. Сколько способов упорядочить 36 объектов? (Можно присвоить девочкам номера от 1 до 36. Тогда упорядочить конфеты — то же самое, что раздать их девочкам с соответствующими номерами.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Есть 6 видов конфет, по мешку каждого вида. Сколько существует способов угостить ими 6 девочек так, чтобы ни одной не попалось двух одинаковых конфет?
Тип задачи. Сколькими способами можно 36 объектов разбить на 2 множества? (Объекты — это пары (девочка + вид конфеты, а множества — пары, в которых девочке дали конфету и в которых не дали.)

$\boxed{\mathbf{5}}$ В магазине продаются чашки шести видов и блюдца шести видов. Сколькими способами можно выбрать два различных набора из чашки и блюдца?
Тип задачи. Сколькими способами можно из 36 объектов выбрать 2? (Всего возможных наборов 36.)

$\boxed{\mathbf{6}}$ Сколько существует способов раскраски доски 6×6 в два цвета? Раскраски, отличающиеся только поворотом доски, считаем различными.

Тип задачи. Сколькими способами можно разбить 36 объектов на 2 множества? (Два множества — это чёрный и белый цвета.)

$\boxed{7}$ **а)** Сколькими способами можно расставить на доске 6×6 числа от 1 до 36? **б)** Сколькими способами можно поставить на доске 6×6 две ладьи? **в)** Сколькими способами можно на доске 36×36 расставить 36 одинаковых ладей, не бьющих друг друга? Расстановки, отличающиеся только поворотом доски, во всех пунктах считаем различными.
Тип задачи. **а)** Сколькими способами можно упорядочить 36 объектов? **б)** Сколькими способами можно из 36 объектов выбрать 2? **в)** Сколькими способами можно упорядочить 36 объектов? (В каждой строчке на каком-то по счёту столбце стоит ладья, все столбцы должны быть заняты. Таким образом, эта задача равносильна следующей: сколькими способами можно расставить номера от 1 до 36 на 36 столбцах?)

$\boxed{8}$ Во рту у злой акулы 6 рядов зубов по 6 зубов в каждом ряду. Если зуб выбить, то он уже не вырастает. Жак Ив Кусто поймал несколько акул, причём среди них нет двух акул с одинаковым набором зубов (т. е. если взять любых двух, найдётся место, где у одной зуб есть, а у другой — нет.) Каким может быть максимальное число пойманных акул?
Тип задачи. Сколькими способами можно разбить 36 объектов на 2 множества? (Тут объекты — зубы, а множества — разбитые и целые.)

$\boxed{9}$ Компьютер работает с двоичными кодами, которые представляют собой записи, составленные из нулей и единиц (например, 001011101). Количество знаков в коде называется его длиной. Сколько различных символов можно закодировать кодом длины 36?
Тип задачи. Сколькими способами можно разбить 36 объектов на 2 множества? (Два множества — это нули и единицы, объекты — места в коде)

$\boxed{10}$ Имеется 34 ёжика и 2 дикобраза. Сколько существует способов отправить по одному зверьку в 36 зоопарков?
Тип задачи. Сколькими способами можно из 36 объектов выбрать 2? (Способы определяются выбором зоопарков, в которые отправят ёжиков.)

Решение типов задач
1. Сколько способов упорядочить 36 объектов?

Решение. Первым можно выбрать любой из 36 объектов, вторым любой из 35 оставшихся и т.д. Всего получаем 36! способов. □

2. Сколькими способами можно из 36 объектов выбрать 2?

Решение. Первым может быть любой из 36, вторым любой из 35, получаем $36 \cdot 35$. Но поскольку нет разницы, какой объект был первым, нужно разделить на 2 и получить ответ: $36 \cdot 35 : 2 = 630$. □

3. Сколькими способами можно 36 объектов разбить на 2 множества?

Решение. Каждый объект можно отнести либо к первому, либо ко второму множеству. То есть существует 2 варианта, куда отнести первый объект, 2 варианта, куда отнести второй, и т. д. Всего получаем: 2^36. □

○ `Школьник не понимает, чего от него хотят, и просто решает задачи.`

–*Давай поймём, о чём эта задача? Что ты тут считаешь? Ты что-то выбираешь? Или упорядочиваешь? Что ты выбираешь (упорядочиваешь)? А если бы это были не конфеты (люди, ладьи и т. д.), а мячи, например, что-нибудь поменялось бы?*

○ `Школьник не может провести аналогии.`

–*Что нужно посчитать в этой задаче? А где ещё нужно было посчитать то же самое, только с другими вещами?*

Листок 12. Треугольник Паскаля

Построим (бесконечный) равнобедренный треугольник из натуральных чисел по следующим правилам:

- в вершине и вдоль боковых сторон стоят единицы;
- в каждой следующей строке на одно число больше, чем в предыдущей;
- каждое число, кроме уже написанных единиц, равно сумме двух чисел, стоящих в предыдущей строке чуть левее и чуть правее.

Получим такой треугольник:

```
         1
        1 1
       1 2 1
      1 3 3 1
     1 4 6 4 1
  1 5 10 10 5 1
 … … … …… … … …
```

```
         М
        Е Е
       Х Х Х
      М М М М
     А А А А А
    Т Т Т Т Т Т
```

(рисунок к задаче 7)

Удобно использовать следующее обозначение: через T_n^k будем обозначать число, стоящее на k-м слева месте в n-й строке треугольника Паскаля (считаем, что единица в каждой строке стоит на нулевом месте). Правила построения треугольника Паскаля в этих обозначениях можно записать так: $T_n^0 = T_n^n = 0$, $T_{n+1}^k = T_n^{k-1} + T_n^k$.

$\boxed{1}$ Выпишите треугольник Паскаля до десятой строки включительно (первой считаем строку, состоящую из двух единиц).

$\boxed{2}$ Сколько чисел в 2015-й строке треугольника Паскаля?

Решение. В первой строчке их 2, во второй — 3, и т. д.. С каждой следующей строчкой количество чисел увеличивается на 1, поэтому в 2015-ой строчке их будет 2016. $\square$

$\boxed{3}$ Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля числа до середины идут по возрастанию, а от середины — по убыванию. (*Подсказка: докажите, что если это верно для строки с номером n, то это верно и для строки с номером $n+1$.*)

Решение. Для строк с небольшими номерами это верно, как видно из треугольника, который мы нарисовали при решении первой задачи. Пусть это верно для строки с номером n; докажем, что тогда это будет верно и для строки с номером $n+1$.

По определению треугольника Паскаля имеем $T_{n+1}^k = T_n^{k-1} + T_n^k$. Пусть $n = 2m$ или $n = 2m+1$; тогда при $k \leqslant m$ имеем $T_n^{k-2} < T_n^{k-1} < T_n^k$. Тогда $T_{n+1}^{k-1} = T_n^{k-2} + T_n^{k-1} < T_n^{k-1} + T_n^k = T_{n+1}^k$. Аналогичным образом получаются и остальные нужные неравенства. $\square$

$\boxed{4}$ **а)** Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2015? **б)** Сколько раз в треугольнике Паскаля встречается число 10?

Решение. **а)** Да: так как второе число в любой строке всегда равно номеру этой строчки, то второе число в 2015-й строке равно 2015. **б)** В первых 10 строках оно встречается 4 раза — это видно из результата задачи 1. В остальных строках число 10 уже не встретится: в строках после 10-й второе и предпоследнее число будут больше 10, а в силу результата задачи 3 также и все числа между ними будут больше 10 (а на первом и последнем месте стоят единицы). $\square$

$\boxed{5}$ **а)** Во сколько раз сумма чисел в шестой строке треугольника Паскаля больше суммы чисел в его пятой строке? **б)** Тот же вопрос про 2014-ю и 2015-ю строки.

Решение. Мы уже знаем, что $T_{n+1}^{k} = T_n^{k-1} + T_n^k$ и $T_{n+1}^{k+1} = T_n^k + T_n^{k+1}$. Таким образом, число T_n^k из n-й строки входит в качестве слагаемого в два числа T_{n+1}^k и T_{n+1}^{k+1} из $(n+1)$-й строки. (Это равенство будет верно также при $k = 0$ и $k = n+1$, если дописать к треугольнику Паскаля слева и справа нули, то есть условиться, что $T_n^{-1} = T_n^{n+1} = 0$ при всех n; на сумму чисел в каждой строке это не повлияет.) Отсюда следует, что сумма чисел в каждой следующей строчке треугольника Паскаля в два раза больше, чем в предыдущей. □

○ `Школьник посчитал пункт а) и угадал ответ в б).`

–*Почему при больших числах ничего не изменится? Как ты думаешь, откуда берётся эффект увеличения суммы в два раза? Как это связано с правилом построения треугольника Паскаля?*

○ `Школьник не знает, что делать.`

–*Как мы считаем числа в треугольнике? Представь, что тебе известны числа в 2014-ой строке треугольника, как ты узнаешь числа в 2015-й?*

6 **а)** Поставим знаки «+» и «−» между числами в 99-й строке треугольника Паскаля. Между первым и вторым числом поставим знак «−», между вторым и третьим — «+», между третьим и четвёртым — «−», потом опять «+», и так далее. Докажите, что значение полученного выражения равно нулю. **б)** То же верно и для 100-й строки. Докажите!

Решение. **а)** Треугольник Паскаля симметричен, а значит, $T_{100}^1 = T_{100}^{99}$, $T_{100}^2 = T_{100}^{98}$, $T_{100}^3 = T_{100}^{97}$, и т. д. При этом знаки перед симметрично расположенными числами противоположны (так как всего чисел 100), а значит, значение полученного выражения равно 0.

б) Из правил построения треугольника Паскаля вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
&T_{100}^0 + T_{100}^2 + T_{100}^4 + \ldots + T_{100}^{100} = (T_{99}^0) + (T_{99}^1 + T_{99}^2) + (T_{99}^3 + T_{99}^4) + \ldots + (T_{99}^{97} + T_{99}^{98}) + (T_{99}^{99}) = \\
&= (T_{99}^0 + T_{99}^1) + (T_{99}^2 + T_{99}^3) + (T_{99}^4 + T_{99}^5) + \ldots + (T_{99}^{96} + T_{99}^{97}) + (T_{99}^{98} + T_{99}^{99}) = \\
&= T_{100}^1 + T_{100}^3 + T_{100}^5 + \ldots + T_{100}^{97} + T_{100}^{99}.
\end{aligned}$$

То есть сумма чисел на чётных местах в 100-ой строке равна сумме чисел на нечётных местах в 100-й строке, а значит, искомое выражение равно 0. Аналогичное доказательство возможно и в пункте а). □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– *Как выразить числа в 100-й строке треугольника через числа в 99-й строке? Давай отдельно посчитаем сумму чисел на чётных и нечётных местах. Что можно сказать о этих суммах?*

7 Сколькими способами, двигаясь по таблице (см. рисунок выше) от буквы к букве, можно прочитать слово МЕХМАТ? От каждой буквы можно переходить только к букве, стоящей в следующей строке чуть правее или чуть левее.

Решение. В первую букву М можно попасть только одним способом. В буквы Е можно попасть тоже только одним способом (из буквы М). Точно так же в любую из букв, стоящих вдоль левого или правого края треугольника, есть всего по одному способу (для этого надо просто всё время двигаться вдоль этого края треугольника). В первую и третью букву Х тоже можно попасть только одним способом, а вот в букву Х посередине — уже двумя (из правой и левой буквы Е). В каждую из букв М на 4-й строке можно попасть из каких-то букв Х, причём если в две буквы Х над данной буквой М можно было попасть двумя и одним способом соответственно, то в данную букву М можно попасть $2 + 1 = 3$ способами: слева-сверху или справа-сверху.

Обнаруживается следующая закономерность: количество способов дойти до данной буквы равно сумме количества способов дойти до буквы слева-сверху от данной и до буквы справа-сверху от данной. Поэтому эти количества способов можно находить по тем же правилам, что числа в треугольнике Паскаля.

Чтобы получить слово МЕХМАТ, пройдя по треугольнику, нужно добраться от первой буквы М до одной из букв Т в последней строке. Суммарное количество способов добраться до одной из них равно сумме чисел в пятой строке треугольника Паскаля: $1+5+10+10+5+1 = 32$. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

– Сколько способов добраться в буквы Е? Откуда мы можем попасть в конкретную букву Х? Как посчитать сколько способов дойти до буквы Х, если мы знаем, сколько способов дойти до буквы Е?

8 Чему равна сумма чисел, стоящих: **а)** в третьей строке; **б)** в четвёртой строке; **в)** в седьмой строке; **г)** в n-й строке треугольника Паскаля?

Решение. По задаче 5 нам известно, что сумма чисел в каждой следующей строке в два раза больше предыдущей. Так как в 1-й строке сумма чисел была равна 2, то во второй она будет равна 4, в третьей — 8, в четвёртой — 16, и т. д.. В n-той строке сумма чисел будет равна 2^n (в частности, в седьмой строке получится сумма $2^7 = 128$). □

○ `Школьник не знает, что делать.`

–Давай посчитаем суммы в первых нескольких строках. Какие они? Прослеживается ли какая-нибудь закономерность?

9 Будем двигаться по треугольнику Паскаля по тем же правилам, что в задаче 7. Докажите, что количество способов дойти по таким правилам от самой верхней единицы до любого числа N в треугольнике Паскаля в точности равно N.

Решение. Чему равно количество способов добраться до некоторого числа? В него мы можем попасть из правого верхнего и левого верхнего числа. Значит, способов в него добраться столько же, сколько в сумме способов добраться в два числа, находящиеся слева-сверху и справа-сверху. То есть количество способов добраться до некоторого числа исходя из количества способов добраться до чисел строчкой выше считается так же, как числа в треугольнике Паскаля. А так как начальные значения (единицы) у них совпадают (см. решение предыдущей задачи), то они совпадают полностью. □

○ `Школьник не знает, что делать.`

–Как посчитать количество способов добраться до числа? А как мы считаем числа в треугольнике Паскаля? В чём сходство?

Листок 13. История про футболки и сочетания

Основная идея этого занятия — познакомить школьников с различными свойствами чисел сочетаний и показать их связь с элементами треугольника Паскаля. При этом следует показать, что свойства можно доказывать как с помощью явной формулы (которая была доказана в задаче 4 занятия 10), так и с помощью определения (причем вторым способом удается доказывать такие свойства, которые по формуле доказать практически невозможно).

В начале занятия нужно еще раз напомнить определение и основную формулу для чисел сочетаний (можно без доказательства):

Определение. Число способов выбрать из n различных предметов k различных предметов, если порядок, в котором они выбираются, неважен, называется *числом сочетаний из n по k* и обозначается C_n^k (читается «цэ из эн по ка»).

Теорема. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Стоит обратить внимание школьников на то, что 0! по определению считается равным 1. Кроме того, полезно напомнить соотношение $n! \cdot (n+1) = (n+1)!$, которое очевидным образом следует из определения факториала (но до которого школьникам бывает трудно самостоятельно додуматься) — оно совершенно необходимо для доказательства некоторых свойств чисел сочетаний с помощью теоремы.

После этого школьникам предлагается самостоятельно читать историю, написанную в листочке курсивом, и последовательно решать задачи. Описанные в истории ситуации помогают строить рассуждения при комбинаторном (то есть не использующем теорему) доказательстве свойств.

Прочитайте историю, а затем с её помощью попробуйте доказать различные свойства чисел сочетаний. В задачах **1–4** дайте по два доказательства: **а)** с помощью определения (тут вам и поможет история); **б)** с помощью теоремы.

Николай собирался в отпуск на юг и выбирал, какие футболки с собой взять. Он ехал на неделю и хотел взять по одной футболке на каждый день, а всего у него было 10 футболок. Сначала Николай долго выбирал, какие футболки взять, но потом решил, что будет проще определиться, какие футболки НЕ брать.

$\boxed{\textbf{1}}$ $C_n^0 = C_n^n = 1$.

Решение. **а)** C_n^0 — это количество способов ничего не выбрать, а C_n^n — количество способов выбрать все предметы, что у нас есть. Очевидно, что и то, и другое равно 1.

б) $C_n^0 = \dfrac{n!}{0!(n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$, $C_n^n = \dfrac{n!}{n!0!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$. □

$\boxed{\textbf{2}}$ $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$.

Решение. **а)** Количество способов выбрать 1 элемент из n, очевидно, равно n. Количество способов выбрать $n-1$ элемент из n равно количеству способов НЕ выбрать 1 элемент из n, то есть тоже равно n.

б) $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$, $C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n!}{n-1!} = n$. □

$\boxed{\textbf{3}}$ (симметричность) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Решение. **а)** Количество способов выбрать из n элементов k равно количеству способов НЕ выбрать $n-k$ элементов, то есть равно C_n^{n-k}.

б) $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = C_n^{n-k}$. □

Среди 10 футболок у Николая есть одна любимая. Николай в сомнениях — то ли взять её с собой в отпуск, то ли оставить: мало ли, выгорит на солнце или запачкается.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (основное биномиальное тождество) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Решение. **а)** Среди $n+1$ предмета будем выбирать $k+1$ предмет (в нашем случае — 7 футболок из 10). Сделать это есть C_{n+1}^{k+1} способов.

Теперь попробуем посчитать то же самое количество способов иначе. Выделим один предмет из наших $n+1$ (в нашей истории это будет любимая футболка). Если выделенный предмет входит в нашу выборку, то осталось ещё добрать k предметов из n (то есть если взять любимую футболку, то к ней нужно добрать ещё шесть футболок из оставшихся девяти). Сделать это есть C_n^k способов. Если же выделенный предмет в нашу выборку не входит, то нужно выбрать все $k+1$ предметов из оставшихся n (в нашем случае — если не взять любимую футболку, то все семь футболок надо выбирать из оставшихся девяти). Сделать это есть C_n^{k+1} способов. Всего получаем как раз $C_n^k + C_n^{k+1}$ способов. Поскольку мы считали те же способы выбора, что в предыдущем абзаце, число способов, посчитанное двумя разными методами, должно получиться одним и тем же, то есть $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$, что и требовалось.

б) Воспользуемся несколько раз тождеством $(m+1)! = m! \cdot (m+1)$ (оно сразу следует из определения факториала):

$$\begin{aligned} C_n^k + C_n^{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \\ &= \frac{n!\cdot(k+1) + n!\cdot(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = C_{n+1}^{k+1}. \end{aligned}$$

□

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пользуясь предыдущими задачами, докажите, что в треугольнике Паскаля в n-й строке на k-м слева месте стоит число C_n^k. (Строка из одной единицы имеет номер 0. В каждой строке начальная единица стоит на нулевом месте.)

Решение. Докажем это индукцией по n. Для нулевой строки это верно. Пусть уже доказано, что в строке с номером n стоят числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$. Тогда в следующей строчке будут стоять числа: $C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0, (C_n^0 + C_n^1) = C_{n+1}^1, (C_n^1 + C_n^2) = C_{n+1}^2, \ldots, (C_n^{n-1} + C_n^n) = C_{n+1}^n, C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1},$ □

Пока футболки стирались, Николай начал сомневаться, стоит ли ему на каждый день брать по футболке. Может, проще взять с собой все футболки? А может, часть из них лучше оставить и вместо этого взять рубашки? В общем, сначала надо определиться, сколько футболок брать, а потом решить, какие именно. Или лучше ещё раз перебрать все футболки и про каждую решить, брать её или нет?

$\boxed{\mathbf{6}}$ С помощью определения докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

Решение. Сколько способов выбрать некоторое количество предметов из n штук? С одной стороны, любой предмет можно брать или не брать: то есть два варианта для первого, два для второго и т. д.. Поскольку выбор для всех предметов надо осуществить одновременно и независимо один от другого, общее количество способов сделать такой выбор равно 2^n.

С другой стороны, мы можем сначала определиться, сколько предметов выбрать, а только потом решать, какие именно. Можно не выбирать совсем ничего, для этого есть C_n^0 способов (конечно, это всего один способ, но сейчас для нас главное не это). Можно выбрать один предмет, для этого есть C_n^1 способов; можно выбрать 2 предмета, для этого есть C_n^2 способов, и так далее. Наконец, можно выбрать все имеющиеся предметы, для этого есть C_n^n способов. Если сложим все эти числа, то получим количество способов выбрать сколько-нибудь предметов из n штук. То есть $C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n$.

Так как в первом и во втором абзаце считали мы число способов сделать одно и то же, получаем, что $C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$. $\square$

Определившись с футболками, Николай стал выбирать себе носки. Носков было много, поэтому он разложил их на две равные кучи и твёрдо решил брать половину. Взять левую кучу? Или правую? А может, один носок из левой, а остальные из правой? Или наоборот?

$\boxed{\mathbf{7}}$ С помощью известных уже тождеств и определения докажите, что

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

Решение. Воспользовавшись свойством симметричности чисел сочетаний, преобразуем левую часть нужного нам тождества:

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=(C_n^0)(C_n^n)+(C_n^1)(C_n^{n-1})+(C_n^2)(C_n^{n-2})+\ldots+(C_n^n)(C_n^0).$$

C_{2n}^n — это количество способов выбрать из $2n$ предметов n предметов. С другой стороны, если мы хотим выбрать из $2n$ предметов n, то можно сначала определиться, сколько возьмём из первых n элементов, а оставшиеся доберем из оставшихся n. Тогда получим, что количество способов выбрать из первых n элементов 0 штук, а из вторых n штук равно $C_n^0\cdot C_n^n$; количество способов выбрать из первых элементов один, а из остальных $n-1$ равно $C_n^1\cdot C_n^2$, и т.д. Всего получаем как раз $(C_n^0)(_n^n+(C_n^1)(C_n^{n-1})+(C_n^2)(C_n^{n-2})+\ldots+(C_n^n)(C_n^0)$ способов. А значит, $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=(C_n^0)(_n^n+(C_n^1)(C_n^{n-1})+(C_n^2)(C_n^{n-2})+\ldots+(C_n^n)(C_n^0)=C_{2n}^n$, что и требовалось доказать. $\square$

Алгебра

Листок 14. Формулы сокращённого умножения

Основные формулы сокращённого умножения известны из школьного курса алгебры за 7 класс. (Впрочем, если формулы квадрата суммы/разности и разности квадратов школьники худо-бедно запоминают, то вот с формулами для третьей степени уже, как правило, беда.) Смысл этого занятия — в том, чтобы познакомить школьников с некоторыми новыми для них способами их использования, а заодно повторить и закрепить сами формулы.

В начале занятия напомните основные формулы сокращенного умножения, которые написаны в начале листочка. Докажите, например, формулу про куб суммы и объясните, как с помощью замены b на $-b$ легко получить из неё формулу для куба разности.

Разберите для примера следующие задачи.

- Вычислить, не умножая в столбик: **а)** 41^2; **б)** 38^2; **в)** $1{,}21 \cdot 1{,}19$.

  Решение. **а)** $41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2\cdot 40\cdot 1 + 1 = 1600 + 80 + 1 = 1681$; **б)** $38^2 = (40-2)^2 = 40^2 - 2\cdot 40\cdot 2 + 2^2 = 1600 - 160 + 4 = 1584$; **в)** $1{,}21\cdot 1{,}19 = (1{,}2+0{,}01)\cdot(1{,}2-0{,}01) = 1{,}2^2 - 0{,}01^2 = 1{,}44 - 0{,}0001 = 1{,}4399$. □

- Упростить выражение: $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{x^2+2xy+y^2} : \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)$.

  Решение.

$$\frac{(x^2-y^2)^2}{x^2+2xy+y^2} : \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) = \frac{((x-y)(x+y))^2}{(x+y)^2} : \frac{y^2-x^2}{x^2\cdot y^2} = \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2\cdot y^2}{y^2-x^2} =$$
$$= \frac{(x-y)^2(x+y)^2}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2\cdot y^2}{(y-x)(y+x)} = \frac{(y-x)\cdot x^2\cdot y^2}{(y+x)} = \frac{x^2y^3-x^3y^2}{x+y}.$$

□

- Известно, что $a-b=2$, $a\cdot b = 15$. Найти a^3-b^3.

  Решение. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)(a^2-2ab+b^2+3ab) = (a-b)\left((a-b)^2+3ab\right) = 2\cdot(2^2+3\cdot 15) = 2\cdot(4+45) = 98$. □

Ну а теперь можно выдать школьникам листочки с задачами.

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$	$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

1 Вычислите: **а)** 81^2; **б)** 79^2; **в)** $0{,}67\cdot 0{,}73$; **г)** $10\frac{2}{7}\cdot 9\frac{5}{7}$; **д)** $\left(4\frac{5}{8}\right)^2$; **е)** 202^3.

Решение. **а)** $81^2 = (80+1)^2 = 80^2 + 2\cdot 80\cdot 1 + 1^1 = 6400 + 160 + 1 = \mathbf{6561}$; **б)** $79^2 = (80-1)^2 = 80^2 - 2\cdot 80\cdot 1 + 1^1 = 6400 - 160 + 1 = \mathbf{6241}$; **в)** $0{,}67\cdot 0{,}73 = (0{,}7-0{,}03)\cdot(0{,}7+0{,}03) = 0{,}7^2 - 0{,}03^2 = 0{,}49 - 0{,}0009 = \mathbf{0{,}4891}$; **г)** $10\frac{2}{7}\cdot 9\frac{5}{7} = \left(10+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(10-\frac{2}{7}\right) = 10^2 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = 100 - \frac{4}{49} = \mathbf{99\frac{45}{49}}$; **д)** $\left(4\frac{5}{8}\right)^2 = \left(4+\frac{5}{8}\right)^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot\frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 16 + 5 + \frac{25}{64} = \mathbf{21\frac{25}{64}}$; **е)** $202^3 = (200+2)^3 = 200^3 + 3\cdot 200^2\cdot 2 + 3\cdot 200\cdot 2^2 + 2^3 = 8000000 + 240000 + 2400 + 8 = \mathbf{8242408}$. □

2 Вычислите: $\left(\dfrac{37{,}79+56{,}93}{37{,}79-56{,}93} - \dfrac{37{,}79-56{,}93}{37{,}79+56{,}93}\right)\cdot\left(\dfrac{37{,}79^2-56{,}93^2}{37{,}79\cdot 56{,}93}\right)$.

Решение. Обозначив для удобства $a = 37{,}79$, $b = 56{,}93$, упрощаем полученное выражение и получаем ответ **4**:

$$\left(\frac{37{,}79+56{,}93}{37{,}79-56{,}93}-\frac{37{,}79-56{,}93}{37{,}79+56{,}93}\right)\cdot\left(\frac{37{,}79^2-56{,}93^2}{37{,}79\cdot 56{,}93}\right)=\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}\right)=$$
$$=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{a^2-b^2}{a\cdot b}=\frac{((a+b)-(a-b))\cdot((a+b)+(a-b))\cdot(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)\cdot ab}=$$
$$=\frac{2b\cdot 2a}{ab}=4.$$

□

3 Найдите значение произведения

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right).$$

Решение.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{400}\right)=$$
$$=\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot\left(1^2-\right)\frac{1}{3}\Big)^2\Big)\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1^2-\left(\frac{1}{20}\right)^2\right)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{20}{19}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{21}{20}=\mathbf{\frac{21}{40}}$$

(в последнем произведении пары подряд идущих множителей сокращаются, кроме самого первого и самого последнего). □

4 Известно, что $a+b=7,\ a\cdot b=2$.
Найдите: **а)** ab^2+a^2b; **б)** a^2+b^2; **в)** $(a-b)^2$; **г)** a^3+b^3; **д)** $a^3b^6+a^6b^3$.

Решение. **а)** $ab^2+a^2b=ab(a+b)=\mathbf{14}$; **б)** $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\mathbf{45}$;
в) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=\mathbf{41}$; **г)** $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)=7\cdot(45-2)=\mathbf{301}$;
д) $a^3b^6+a^6b^3=a^3b^3(b^3+a^3)=(ab)^3(a^3+b^3)=2^3\cdot 301=\mathbf{2408}$. □

5 Про действительное число a известно, что $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{3}$. Найдите:
а) $a^2+\dfrac{1}{a^2}$; **б)** $\dfrac{a^4+1}{2a^2}$; **в)** $a^3-\dfrac{1}{a^3}$; **г)** $\dfrac{a^{12}+1}{a^6}$.

Решение. **а)** $a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+2a\cdot\dfrac{1}{a}=\mathbf{\dfrac{22}{9}}$; **б)** $\dfrac{a^4+1}{2a^2}=\dfrac{1}{2}\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)=\mathbf{\dfrac{11}{9}}$;
в) $a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}+1\right)=\dfrac{2}{3}\cdot\left(1+2\dfrac{4}{9}\right)=\mathbf{\dfrac{62}{27}}$;
г) $\dfrac{a^{12}+1}{a^6}=a^6+\dfrac{1}{a^6}=\left(a^2\right)^3+\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^3=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^4-1+\dfrac{1}{a^4}\right)=$
$=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\left(a^2\right)^2-1+\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^2\right)=\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)^2-2-1\right)=\mathbf{\dfrac{5302}{729}}$. □

$\boxed{6}$ **а)** Решите уравнение $x^2 = 20152014 \cdot 20152016 + 1$.
б) Два различных числа x и y (не обязательно целых) удовлетворяют равенству

$$x^2 - 2015x = y^2 - 2015y.$$

Найдите сумму чисел x и y.
в) Про различные числа a и b известно, что $\dfrac{a}{b} + a = \dfrac{b}{a} + b$. Найдите $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Решение. **а)** Перепишем уравнение в виде $x^2 = (20152015-1)\cdot(20152015+1)+1 = 20152015^2$. Отсюда $x = \pm\mathbf{20152015}$.
б) Перепишем условие в виде $x^2 - y^2 = 2015x - 2015y$, или $(x-y)(x+y) = 2015(x-y)$. Поскольку по условию $x \neq y$, отсюда следует, что $x + y = \mathbf{2015}$.
в) Перепишем условие в виде $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a} = b - a$, или $\dfrac{(a-b)(a+b)}{ab} = b - a$. Поскольку по условию $a \neq b$, отсюда следует $\dfrac{(a+b)}{ab} = -1$. Наконец, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{(a+b)}{ab} = -\mathbf{1}$. □

$\boxed{7}$ Докажите, что если $b = a - 1$, то

$$(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) = a^{64} - b^{64}.$$

Решение. Из условия следует, что $a - b = 1$. Умножим это равенство на то, которое требуется доказать, и применим несколько раз формулу разности квадратов в левой части, пока не получим верное равенство:

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) &= 1\cdot(a^{64}-b^{64});\\
(a^2-b^2)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) &= a^{64}-b^{64};\\
(a^4-b^4)\cdot(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{32}+b^{32}) &= a^{64}-b^{64};\\
(a^8-b^8)\cdot(a^8+b^8)\cdot(a^{16}+b^{16})\cdot(a^{32}+b^{32}) &= a^{64}-b^{64};\\
(a^{16}-b^{16})\cdot(a^{16}+b^{16})\cdot(a^{32}+b^{32}) &= a^{64}-b^{64};\\
(a^{32}-b^{32})\cdot(a^{32}+b^{32}) &= a^{64}-b^{64}.
\end{aligned}$$

□

$\boxed{8}$ Найдите значение выражения $\dfrac{a^3+b^3-3b^2+3b-1}{a^2-ab+a+(b-1)^2}$
при $a = -3 - 5\sqrt{3}$, $b = 11 + 5\sqrt{3}$.

Решение. $\dfrac{a^3+b^3-3b^2+3b-1}{a^2-ab+a+(b-1)^2} = \dfrac{a^3+(b-1)^3}{a^2-a(b-1)+(b-1)^2} =$
$= \dfrac{(a+(b-1))(a^2-a(b-1)+(b-1)^2)}{a^2-a(b-1)+(b-1)^2} = a + b - 1 = -3 - 5\sqrt{3} + 11 + 5\sqrt{3} + 1 = \mathbf{9}$. □

$\boxed{9}$ Найдите все пары натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению:
а) $x^2 - y^2 = 19$; **б)** $x^2 - y^2 = 111$.
в) Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых — также простое число.

Решение. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. **а)** Так как произведение равно простому числу 31, то больший множитель равен 31, а меньший 1. Итак, $x - y = 1$, $x + y = 31$, откуда $\mathbf{x = 16}$, $\mathbf{y = 15}$. Здесь важно, что x и y — натуральные, а значит, положительные числа, поэтому $x - y < x + y$. **б)** $303 = 1 \cdot 303 = 3 \cdot 101$. Имеем два случая. 1) $x - y = 1$, $x + y = 303$, откуда $\mathbf{x = 152, y = 151}$. 2) $x - y = 3$, $x + y = 101$, откуда $\mathbf{x = 52, y = 49}$. **в)** Пусть p и q — простые числа и $p^2 - q^2 = (p-q)(p+q)$ — простое число. Если произведение двух натуральных множителей — простое число, то один из этих множителей (а именно меньший) должен быть равен 1. Тогда $p - q = 1$. Следовательно, одно из наших простых чисел чётно, то есть $\mathbf{q = 2}$, $\mathbf{p = 3}$. □

$\boxed{\textbf{10}}$ **а)** Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел: $(a+b+c)^2=?$ **б)** Известно, что $a+b+c=5$ и $ab+bc+ac=5$. Чему может равняться $a^2+b^2+c^2$? **в)** Известно, что $x+y+z=0$. Докажите, что $xy+yz+zx\leqslant 0$.

Решение. **а)** $(a+b+c)^2=\left((a+b)+c\right)^2=\ldots=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$. **б)** По пункту а) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=5^2-2\cdot 5=\mathbf{15}$. **в)** $(x+y+z)^2=0=x^2+y^2+z^2+2(ab+bc+ac)$. Значит, $ab+bc+ac=-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$. Поскольку $x^2+y^2+z^2\geqslant 0$, получаем $xy+yz+zx\leqslant 0$. $\square$

$\boxed{\textbf{11}}$ Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, является квадратом натурального числа.

Решение. Удобно обозначить меньшее из четырёх чисел за $x-2$, тогда остальные числа будут $x-1$, x и $x+1$. Заметим, что $x-2=x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$, $x-1=x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$, $x=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, x+1=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, и преобразуем произведение наших четырех чисел с помощью формулы разности квадратов, а затем выделим полный квадрат:

$$(x-2)(x-1)x(x+1)+1=\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)+1=\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{16}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-2\cdot\frac{5}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{9}{16}+1=\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+\frac{9}{16}+1=(x^2-x-1)^2-1+1=(x^2-x-1)^2.$$

$\square$

Листок 15. Неравенство о среднем

В начале занятия дайте определения среднего арифметического и среднего геометрического:

Определение. *Среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$* — это частное от деления их суммы на их количество: $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.
Среднее геометрическое n **положительных** *чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$* — это корень n-й степени из их произведения: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

Разберите примеры:

- Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:
  а) 2 и 8; **б)** 19 и 19; **в)** 2, 6 и 18.

  Решение. **а)** $(2+8)/2 = 5$, $\sqrt{2 \cdot 8} = 4$; **б)** $(19+19)/2 = 19$, $\sqrt{19 \cdot 19} = 19$; **б)** $(2+6+18)/3 = 26/3$, $\sqrt[3]{2 \cdot 6 \cdot 18} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot 3 = 6$. □

  Здесь полезно заметить, что среднее арифметическое и геометрическое любого количества одинаковых чисел равно этим числам. Кроме того, можно объяснить, что если отметить на числовой прямой точки, соответствующие двум числам, то их среднему арифметическому на оси будет соответствовать середина отрезка с концами в этих точках. А вот геометрический смысл среднего геометрического (и почему оно вообще так называется) объясняется в задаче 6.

Сформулируйте и докажите неравенство о среднем:

Теорема (неравенство о среднем). *Если $a \geqslant b \geqslant 0$, то $a \geqslant \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot b} \geqslant b$.*
Все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a = b$.

Другими словами, *среднее арифметическое любых двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического, и оба средних заключены между самими числами.*

Доказательство. Докажем первое неравенство в цепочке. Это нетрудно: в самом деле, если $a \geqslant b$, то $\dfrac{a}{2} \geqslant \dfrac{b}{2}$, а значит, $a = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} \geqslant \dfrac{a}{2} \geqslant \dfrac{b}{2}$. Равенство достигается, очевидно, в точности при $a = b$.

Докажем второе неравенство в цепочке (оно и составляет основное содержание теоремы). Домножим обе части неравенства на 2 и перенесём все слагаемые в левую часть: $a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0$. Поскольку $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, это неравенство можно переписать в таком виде: $(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geqslant 0$, или, с учётом формулы квадрата разности, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$. Последнее неравенство, очевидно, верно, так как квадрат любого действительного числа неотрицателен. Более того, это неравенство обращается в ноль в точности при $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, то есть когда $a = b$. Поскольку все выполненные преобразования равносильны, тем самым доказано и исходное неравенство.

Наконец, докажем третье неравенство в цепочке. Это делается почти так же, как для первого: если $a \geqslant b$, то (помним, что числа a и b неотрицательны!) $\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b}$, откуда $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$. Равенство достигается, очевидно, в точности при $a = b$. Теорема полностью доказана. □

Теперь стоит напомнить школьникам основные свойства неравенств (особенно если листочек предлагается не девятиклассникам, а восьмиклассникам):

- если $a \geqslant b$, то $a + c \geqslant b + c$;
- если $a \geqslant b$ и $c > 0$, то $ac \geqslant bc$, если $a \geqslant b$ и $c < 0$, то $ac \leqslant bc$ (это полезно проиллюстрировать числовыми примерами);

- если $a \geqslant b$ и $c \geqslant d$, то $a + c \geqslant b + d$;
- если $a \geqslant b > 0$ и $c \geqslant d > 0$, то $ac \geqslant bd$ (опять-таки, объясните на примере, почему этого нельзя делать, если в неравенствах есть отрицательные числа);
- если $a \geqslant b$ и $b \geqslant c$, то $a \geqslant c$.

Разберите для примера задачи:

- Докажите, что при всех $x > 0$ выполнено неравенство $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

  Решение. Из неравенства о среднем следует, что $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}} = 2$. Равенство достигается только при $x = \dfrac{1}{x} = 1$. □

- Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенство: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3$.

  Решение. Из предыдущей задачи следует, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$. Кроме того, $\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} - 1 = \dfrac{(c-a)(c-b)}{ac} \geqslant 0$. Складывая эти неравенства, получим требуемое. □

Ну а теперь можно выдать школьникам листочки с задачами.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что для всякого положительного числа C и любых чисел x, y выполняется неравенство $\dfrac{Cx^2}{2} + \dfrac{y^2}{2C} \geqslant xy$.

Решение. Это неравенство легко следует из неравенства о среднем или доказывается по аналогии с ним. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Какое наименьшее значение может принимать выражение $x + \dfrac{1}{9x}$ при положительных x?
б) При каком x достигается наименьшее значение?

Решение. **а)** Из неравенства о среднем следует, что $x + \dfrac{1}{9x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{9x}} = \mathbf{\dfrac{2}{3}}$.
б) Минимум достигается при $x = \dfrac{1}{9x}$, что при условии $x > 0$ равносильно $\mathbf{x} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$. □

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$ и $ab > a + b$, то $a + b > 4$.

Решение. Имеем $ab > a + b > 2\sqrt{ab}$, следовательно, $\sqrt{ab} > 2$, откуда $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} > 4$. □

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d имеет место неравенство

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

б) Когда достигается равенство?

Решение. **а)** Дважды применяем неравенство о среднем. **б)** Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = \mathbf{d}$. Это следует из решения пункта а). □

$\boxed{\mathbf{5}}$ Для любых $a, b, c > 0$ докажите неравенства:
а) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$; **б)** $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

Решение. **а)** Складываем неравенства $a^2+b^2 \geqslant 2ab$, $b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $a^2+c^2 \geqslant 2ac$ и результат делим пополам. **б)** Перемножаем неравенства $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, $a+c \geqslant 2\sqrt{ac}$. □

$\boxed{6}$ **а)** В треугольнике ABC угол C — прямой, CH — высота. Докажите, что $CH = \sqrt{AH \cdot BH}$. (Другими словами, *высота прямоугольного треугольника равна среднему геометрическому проекций катетов на гипотенузу.*)

Подсказка: сначала докажите, что $\Delta ACH \sim \Delta BCH$.

б) С помощью пункта а) докажите геометрически неравенство о среднем.

Подсказка: в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Решение. **а)** Треугольники ACH и BCH подобны, поскольку оба они подобны треугольнику ABC по двум углам. Отсюда следует, что $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{BH}$, откуда и получаем требуемое.
б) В обозначениях пункта а): в прямоугольном треугольнике медиана CM, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Поскольку $CM \geqslant CH$ (наклонная не короче перпендикуляра) и $AB = AH + CH$, получаем $(AH+CH):2 \geqslant \sqrt{AH \cdot CH}$. □

$\boxed{7}$ Пусть $x^2+y^2+a^2+b^2=2$. Докажите, что:
а) $xy \leqslant 1-ab$; **б)** $(a+2)(b+2) \geqslant 0$; **в)** $xy \leqslant ab+2a+2b+3$.

Решение. **а)** $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{2-(a^2+b^2)}{2} \leqslant 1-ab$. **б)** В условиях задачи числа a и b по модулю не превосходят 2 (и даже $\sqrt{2}$), поэтому $a+2 \geqslant 0$ и $b+2 \geqslant 0$. Перемножив эти неравенства, получим $(a+2)(b+2) \geqslant 0$. **в)** Имеем $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2} = 1 - \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Докажем, что $1-\dfrac{a^2+b^2}{2} \leqslant ab+2a+2b+3$. Для этого умножим это последнее неравенство на 2, перенесем все в одну сторону и получим $a^2+b^2+2ab+4a+4b+4 \geqslant 0$, или $(a+b+2)^2 \geqslant 0$, что, очевидно, верно. □

$\boxed{8}$ **а)** Пусть $a>1$, $b<1$. Докажите, что $a+b>1+ab$.
б) Пусть $a,b,c>0$ и $abc=1$. Докажите, что $a+b+c \geqslant 3$.
в) Для любых $a,b,c>0$ докажите неравенство $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.
г) Сформулируйте и докажите аналог этого неравенства для n чисел.

Решение. **а)** Из условия следует, что $(a-1)(1-b)>0$, откуда, раскрывая скобки и перенося часть слагаемых, в правую часть, получим требуемое. **б)** Если $a=b=c=1$, неравенство верно. Если нет, то без ограничения общности можно считать, что $a>1$, $b<1$. Тогда согласно пункту а) $a+b+c > 1+ab+c$. Произведение положительных чисел 1, ab и c вновь равно 1, для них повторяем только что проделанное рассуждение. В итоге получаем $a+b+c > 1+1+abc = 3$. **в)** Произведение положительных чисел $\dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}}$, $\dfrac{b}{\sqrt[3]{abc}}$, $\dfrac{c}{\sqrt[3]{abc}}$ равно 1, поэтому по пункту б) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}} + \dfrac{b}{\sqrt[3]{abc}} + \dfrac{c}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 3$, откуда следует требуемое неравенство. **г)** Общее неравенство о среднем: для любых $a_1, a_2, \ldots a_n \geqslant 0$ имеет место неравенство $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Для доказательства сначала доказывается аналог пункта б) для n чисел (тем же способом), после чего доказательство пункта в) легко переносится на случай n чисел. □