Числа Фибоначчи

1. Основные сведения.

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность φ_n, в которой первые два числа равны 1, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих:

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \varphi_2 = 1, \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}, \text{если } n > 2. \end{gathered} \tag{1}$$

Первые 10 чисел Фибоначчи равны $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. Последовательность Фибоначчи обладает множеством интересных свойств и появляется в качестве ответа во многих задачах.

С числами Фибоначчи можно столкнуться и за пределами математики — например, эта последовательность упоминается в известной книге Дэна Брауна «Код да Винчи». Кроме того, если приехать на станцию московского метро «Ломоносовский проспект», можно обнаружить, что ряды цифр, которыми украшены её стены, являются фрагментами последовательности Фибоначчи.

2. Примеры задач.

Поскольку элементы последовательности Фибоначчи в силу своего определения выражаются через предыдущие, утверждения, в которых они встречаются, удобно доказывать по индукции. Рассмотрим для примера такую задачу.

Задача 1. *Некий преподаватель в течение года должен поставить n оценок. При этом он ставит только двойки и пятёрки, а чтобы не показаться злым, никогда не ставит две двойки подряд. Сколькими способами он может поставить оценки?*

Обозначим это количество способов через $f(n)$. Посмотрим на самую первую оценку. Если это «5», то остальные $n-1$ оценок можно ставить как угодно в соотвествии с условием задачи, что даёт нам $f(n-1)$ вариантов. А если это «2», то следующей оценкой по условию обязательно будет «5», а оставшиеся $n-2$ оценки можно поставить $f(n-2)$ способами.

Таким образом получается, что $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. Осталось заметить, что $f(0) = 1 = \varphi_2$, а $f(1) = 2 = \varphi_3$ и по индукции получить ответ: $f(n) = \varphi_{n+2}$.

3. Явная формула

Формула (1) называется *рекуррентной*, поскольку выражает следующее число Фибоначчи через предыдущие. Хотелось бы получить *явную* формулу, которая позволила бы выразить n-ое число Фибоначчи непосредственно через n. Такая формула действительно существует и называется формулой Бине:

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{2}$$

Формулу Бине можно доказать по индукции (проделайте это!), но возникает справедливый вопрос — а как до этого догадаться? Попробуем вывести эту формулу, не зная её заранее.

3.1. Рекуррентные соотношения

Забудем на время про условие $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ и будем рассматривать все последовательности f_n, удовлетворяющие соотношению $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Легко видеть (проверьте!), что если последовательности f_n и g_n удовлетворяют данном соотношению, то для последовательности $h_n = af_n + bg_n$ это тоже верно. А теперь будем искать последовательность вида $f_n = x^n$, где $x \neq 0$, причём так, чтобы выполнялось наше рекуррентное соотношение:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \iff x^{n+1} = x^n + x^{n-1} \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

У этого уравнения есть два корня, которые часто обозначают буквами φ и $\hat{\varphi}$:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, последовательности $f_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ и $\hat{f}_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ удовлетворяют рекуррентному соотношению для чисел Фибоначчи. А теперь будем искать формулу для чисел Фибоначчи в виде $\varphi_n = af_n + b\hat{f}_n$. Для этого нужно подобрать a и b так, чтобы выполнялись начальное условия[1]: $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_1 = 1$. Отсюда получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + b \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Подставляя полученные a и b, а также выражения для f_n и $\hat{f}_n$ в соотношение $\varphi_n = af_n + b\hat{f}_n$, получаем формулу (2). □

[1]Здесь удобно рассмотреть число Фибоначчи с нулевым номером. Легко видеть, что если положить $\varphi_0 = 0$, то рекуррентное соотношение продолжит выполняться: $\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0$. Можно было бы взять в качестве начального условия и $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, просто тогда система уравнений стала бы более громоздкой.

Может показаться удивительным, что мы почему-то стали искать нужную нам последовательность именно виде суммы двух известных нам последовательностей, а ещё более удивительным то, что такая последовательность нашлась. Чтобы получить представление о том, почему нам так «повезло», можно провести аналогию с векторами на плоскости. Как мы уже отмечали выше, последовательности, заданные рекуррентным соотношением, можно складывать и умножать на число, рекуррентное соотношение от этого не перестаёт быть верным. Можно рассматривать множество всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению, как множество векторов на плоскости, а сами последовательности — как отдельные векторы[2]. Как известно, два неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис, любой вектор единственным образом представляется в виде линейной комбинации базисных векторов. В нашем случае роль базисных векторов играют последовательности (f_n) и $(\hat{f}_n)$, а коэффициенты a и b — это координаты последовательности (φ_n) в этом базисе. Почему в базисе именно два вектора? Дело в том, что наша последовательность однозначно задаётся двумя числами — своими первыми элементами, поэтому было бы странно предполагать, что пространство последовательностей, удовлетворяющих нашему рекуррентному соотношению, имеет бóльшую размерность.

Можно также задаться вопросом, почему для нахождения базиса мы изначально стали рассматривать именно геометрическую прогрессию, а например, не арифметическую или вообще какую-то другую последовательность. Самый простой ответ — потому, что для изученных нами прогрессий нам уже известна явная формула, поэтому их линейная комбинация даст нам явную формулу для искомой последовательности. А арифметической прогрессии, удовлетворяющей рекуррентному соотношению, не существует (проверьте!), поэтому остаётся рассматривать геометрическую.

3.2. Золотое сечение[3].

Число $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ называется *числом Фидия* или *золотым сечением*. Оно тесно связано с числами Фибоначчи — например, отношение φ_{n+1}/φ_n стремится к этому числу при $n \to \infty$. Не следует путать обозначение числа Фидия (φ) с обозначением чисел Фибоначчи (φ_n): в отличие от последних, у него нет нижнего индекса, задающего номер. Золотое сечение часто называют «красивым» числом в том смысле, что задаваемые им пропорции «приятны глазу». Из-за этого данное соотношение часто используется в искусстве. Математически это формализовать сложно, но можно привести, скажем, такой пример:

Задача 2. *Прямоугольный лист бумаги разрезали по прямой на квадрат и прямоугольник меньшего размера. Оказалось, что маленький прямоугольник подобен исходному. Чему равно отношение сторон прямоугольника?*

Решение. Введём обозначения для длин отрезков, как показано на рисунке 1. Из условия следует соотношение $\dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$. Перемножив пропорцию крест-накрест и перенеся слагаемые в другую часть, получим уравнение $a^2 - ab - b^2 = 0$. Если разделить обе части на b^2,

[2]Есть даже понятие абстрактного векторного пространства, с помощью которого можно придать строгость этому рассуждению. Впрочем, пока нам достаточно интуитивного представления.

[3]Содержание этого параграфа не обсуждалось подробно на занятии, однако, на взгляд автора, достаточно интересно, чтобы включить его в этот конспект.

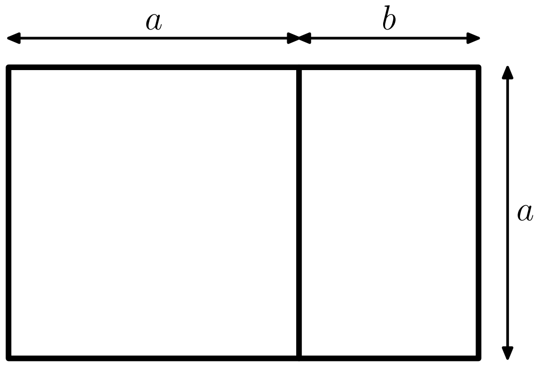

Рис. 1. Геометрический смысл золотого сечения.

получается уже знакомое нам уравнение на $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$:

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0.}$$

Из двух его корней $\boldsymbol{\varphi}$ и $\boldsymbol{\hat{\varphi}}$ нам подходит только $\boldsymbol{\varphi}$, так как $\boldsymbol{\hat{\varphi} < 0}$. Таким образом, соотношение сторон обоих прямоугольников равно $\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. □

Дополнительная литература

- Спивак А.В. Энциклопедия «Числа и фигуры»:

  `http://www.kvant.info/panov/enciklop.pdf`

- Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. М.:МЦНМО, 2005

- Канунников А.Л. Видеолекции малого мехмата для 9–11 классов за 2021 –2022 учебный год:

  `https://teach-in.ru/course/little-mehmat-9-11`