

Пусть требуется доказать утверждение вида: «Для каждого натурального n верно, что...». Это всё равно, что доказать бесконечную цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что...», «Для $n = 2$ верно, что...», ..., «Для $n = 3799$ верно, что...» и так далее.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой индукции**), а затем доказать **шаг** (или **переход**): «Если верно утверждение № n , то верно утверждение №($n + 1$)». Если верны база индукции и шаг индукции, то все утверждения верны.

3.1. Докажите, что при всех $x > -1$ и для любого натурального числа n выполняется *неравенство Бернулли*: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

3.2. В одной небольшой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

3.3. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а каждый следующий элемент равен среднему арифметическому всех предыдущих: $a_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

Найдите значение элемента a_{2023} .

3.4. Докажите, что для любого натурального числа n

$$\text{а) } 10^n + 18n - 1 \vdots 27 \quad \text{б) } 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \vdots 17$$

3.5. Значение числа x выбрано таким образом, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ при любом целом n тоже является целым.

3.6. Захватив добычу, n разбойников пытаются её поделить. У каждого из них своё мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\frac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками для случая:

а) $n = 2$;

б) $n = 3$;

в) произвольного $n > 2$.

3.7. Докажите, что для любых натуральных n

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}; \quad \text{б*) } (2!) \cdot (4!) \cdot \dots \cdot (2n)! \geq ((n+1)!)^n$$

3.8. а) На сколько частей делят плоскость n прямыми «общего положения», то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

б*) На сколько частей делят пространство n плоскостей «общего положения»? И что это за «общее положение»?