2.1. Три числа, не равных нулю, образуют арифметическую прогрессию, а их квадраты, взятые в том же порядке — геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

2.2. Найдите сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1^2}{1\cdot 3} + \frac{2^2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

2.3. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 2^k = 1^2\cdot 2^1 + 2^2\cdot 2^2 + 3^2\cdot 2^3 + \ldots + n^2\cdot 2^n$.

2.4. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{11\ldots 1}_{k} = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots 1}_{n}$.

2.5. Найдите суммы: **а)** $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!$ **б)** $\sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$

2.6. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2$.

2.7. Даны три вертикальных стержня, на первый из них надеты n дисков различного диаметра, образующие пирамиду (внизу лежит диск наибольшего диаметра, вверху — наименьшего). За одно действие разрешается переместить один лежащий сверху диск с одного стержня на другой, при этом нельзя класть больший диск на меньший. Какое наименьшее количество действий требуется, чтобы переместить всю пирамиду с первого стержня на третий, если задано одно из дополнительных требований:

а) нельзя перемещать диск напрямую с первого диска на третий и обратно (каждое перекладывание должно производиться через второй стержень),

б) самый маленький диск нельзя класть на второй стержень?

2.8. Докажите, что каждое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = \sum_{k=1}^{m} a_k\cdot k! = a_1\cdot 1! + a_2\cdot 2! + \ldots + a_m\cdot m!$$

где $0 \leqslant a_k \leqslant k$ для всех $k = 1, 2, \ldots m$ и $a_m \neq 0$.