1.1. Докажите, что для любого натурального числа n имеет место равенство: $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$. В чём геометрический смысл этого равенства?

Числа $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ называются *треугольными.*

1.2. Докажите равенства и укажите их геометрический смысл:
а) $T_n + T_{n+1} = (n+1)^2$; б) $T_{m+n} = T_n + T_m + mn$.

1.3. При помощи метода суммирования вычислите $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

1.4. Обозначим $\mathcal{X}_n$ количество точек в составленном из точек правильном шестиугольнике, одна сторона которого содержит n точек (на рисунке 1 показаны такие шестиугольники для n равного **1**, **2** и **3**). Такие числа называются *гексами.* Докажите следующие свойства этих чисел:

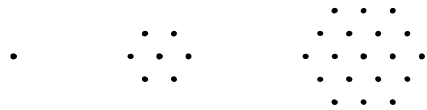


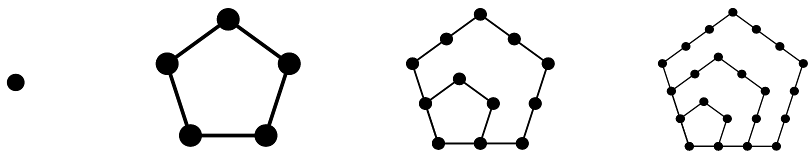
Рис. 1: Гексы

а) $\mathcal{X}_n = 6T_{n-1} + 1$; б) $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \ldots + \mathcal{X}_n = n^3$.

В чём геометрический смысл этих соотношений?

1.5. Пусть шары сложены в виде тетраэдра, у которого каждое ребро состоит из n шаров. Обозначим через $\mathcal{Y}_n$ количество шаров в таком тетраэдре. Докажите следующие свойства тетраэдральных чисел:
а) $\mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_{n-1} + T_n$;
б) $\mathcal{Y}_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$;
в) $\mathcal{Y}_n = 1\cdot n + 2\cdot(n-1) + 3\cdot(n-2) + \ldots + n\cdot 1$

1.6. Аналогично треугольным числам T_n можно определить m-угольные числа $P_{m,n}$ (на рисунке показаны примеры для $P_{5,1}, P_{5,2}, P_{5,3}$ и $P_{5,4}$).



а) Чему равно $P_{m,n} - P_{m,n-1}$?
б) Выразите $P_{m,n}$ через m и n.