Геометрическое суммирование

1. Треугольные числа

Как вычислить значение суммы $1+2+3+\ldots+n$? Самый известный способ подсчёта, изобретение которого обычно приписывают К.Ф.Гауссу, состоит в том, чтобы сложить первое слагаемое с последним, второе с предпоследним, и т.д. Сумма каждой такой пары чисел будет равна $n+1$, а всего таких пар будет $\frac{n}{2}$, откуда искомая сумма будет равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Впрочем, при таком подходе отдельного рассмотрения заслуживает случай нечётного числа n, но и тут всё просто: числовых пар теперь будет $\frac{n-1}{2}$, но в середине останется одно число $\frac{n+1}{2}$, у которого не будет пары. Следовательно, вся сумма будет равна $\frac{n-1}{2}\cdot(n+1)+\frac{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом, для любого натурального числа n выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^{n} = 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

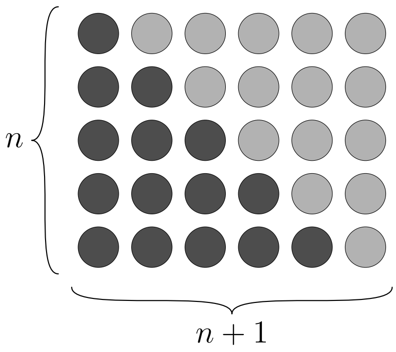

Рис. 1. Геометрический способ вычисления суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

Рассматривать отдельно два случая не очень приятно, кроме того, при таком подходе остаётся неясным, почему мы получаем ответ одного и того же вида. Гораздо нагляднее выглядит «геометрическое» доказательство (см. рис. 1). Количество светлых фишек, как и количество тёмных — это искомая сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} k$. При этом количество всех фишек равно $n(n+1)$, так как они образуют прямоугольник размера $n\times(n+1)$.

Поскольку по отдельности светлые и тёмные фишки образуют треугольники, числа вида $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ называют *треугольными числами*.

2. Сумма квадратов

Рассмотрим теперь более сложный пример: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$. Как вычислить такую сумму? Для начала попробуем сжульничать и предположим, что кто-то подсказал нам, что ответ будет таким: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Легко проверить его для небольших n, в самом деле:

- $1^2 = 1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$,
- $1^2 + 2^2 = 5 = \dfrac{2 \cdot (2+1)(2 \cdot 2 + 1)}{6}$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = \dfrac{3 \cdot (3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6}$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = \dfrac{4 \cdot (4+1)(2 \cdot 4 + 1)}{6}$.

Для того, чтобы доказать это в общем случае, то есть для произвольного n, можно воспользоваться *методом математической индукции*. Идея этого метода в следующем. Для $n = 1$ мы эту формулу уже проверили (и даже для нескольких следующих, но это даже неважно). Попробуем доказать, что если формула верна для какого-то конкретного (но произвольного) значения n, например, для $n = N$, то она также будет верна и для n, равного $N+1$. Если мы докажем это утверждение (его обычно называют *переходом* или *шагом* индукции). Тогда поскольку формула верна для $n = 1$ (это называется *базой* индукции), то она будет верна и для $n = 2$, а значит и для $n = 3$, и так далее — ясно, что так можно дойти до любого натурального числа.

Итак, предположим, что для какого-то конкретного числа N имеет место равенство $\sum\limits_{k=1}^{N} k^2 = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6}$. Покажем, что в таком случае сумма $\sum\limits_{k=1}^{N+1} k^2$ будет равна $\dfrac{(N+1)\big((N+1)+1\big)\big(2 \cdot (N+1)+1\big)}{6} = \dfrac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}$. В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{N+1} k^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + N^2}_{=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}} + (N+1)^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 =$$

$$= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{6(N+1)^2}{6} = \frac{N+1}{6} \cdot \big(N(2N+1) + 6(N+1)\big) =$$

$$= \frac{N+1}{6} \cdot \big(2N^2 + 7N + 6\big) = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}.$$

□

Итак, формулу мы доказали, но как догадаться до ответа? Нельзя ли, как и в случае с треугольными числами, нарисовать красивую картинку, при взгляде на которую всё станет понятно? Оказывается, геометрическое решение есть и здесь. На рисунке 2 изображены 3 треугольника из чисел. Легко видеть, что сумма числе в каждом из них равна $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$. В самом деле, там ровно 1 раз встречается число 1, ровно 2 раза число 2, и т.д. Таким образом, сумма всех чисел в этих трёх треугольниках равна $3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$. С другой стороны, если отдельно сложить числа в соответствующих друг другу позициях, то получится треугольник, составленный из одинаковых чисел, равных $2n+1$. В самом деле, для углов это видно непосредственно, а при сдвиге на одну позицию в любом направлении значение в одном из треугольников увеличится на 1, в другом уменьшится, а в третьем останется прежнем, таким образом сумма трёх значений в любой позиции будет одинаковая. Осталось вспомнить, что количество чисел в таком

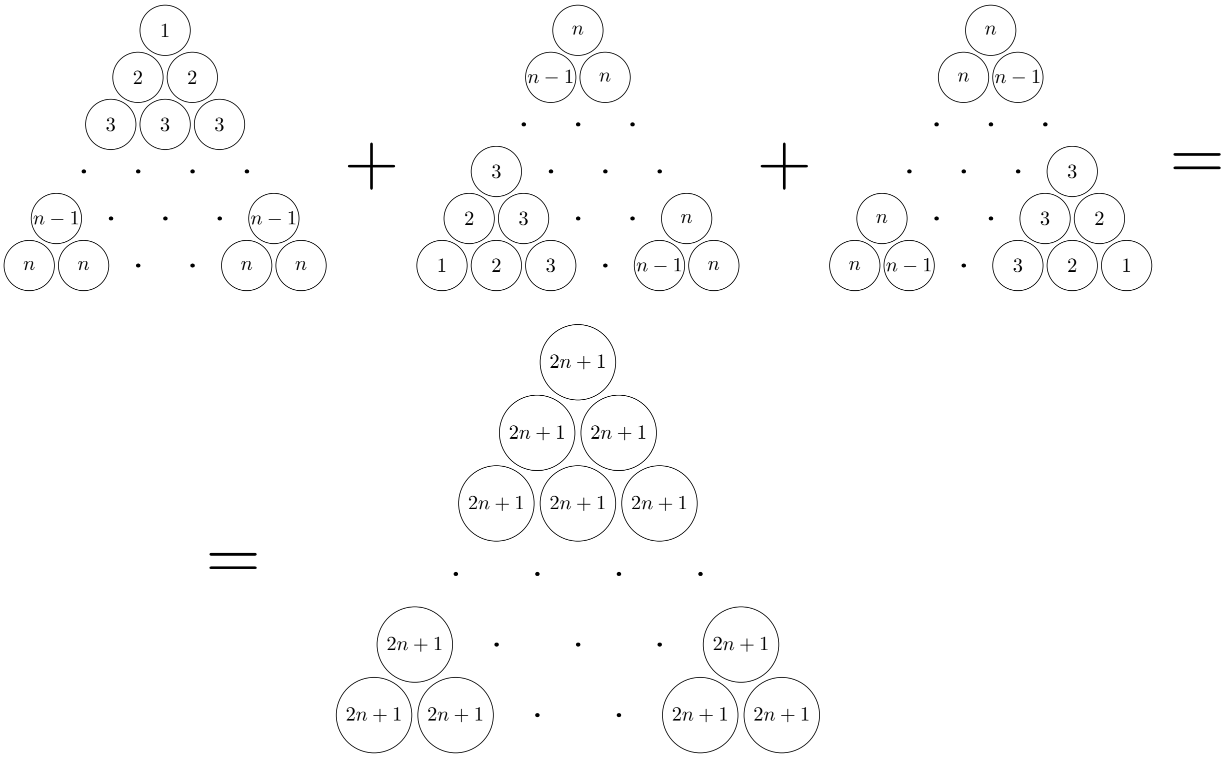

Рис. 2. Геометрический способ вычисления суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.

треугольнике мы уже умеем считать – это $\dfrac{n(n+1)}{2}$, откуда сумма всех чисел в треугольнике равна $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. Следовательно, $3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$, откуда

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Метод суммирования

Геометрические конструкции, использованные нами для вычисления сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ выглядят красиво, но они в каком-то смысле искусственно придуманы для конкретных частных случаев. А как быть, если хочется вычислить сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^m$ для произвольного значения m? Можно предположить, что раз $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ — многочлен второй степени от n, а $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ — многочлен третьей степени, то значение суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ будет многочленом четвёртой степени, и так далее. Такое предположение позволит вычислить ответ методом неопределённых коэффициентов, а затем доказать его по индукции. Однако при этом будут получаться довольно громоздкие выкладки. Поэтому мы воспользуемся немного другим приёмом, который называется *методом суммирования*. Он позволяет выразить $\sum\limits_{k=1}^{n} k^m$ через значения значения такой суммы для предыдущих значений m. Для начала вспомним, что для любого N выполнено соотношение $(N-1)^3 = N^3 - 3N^2 + 3N - 1$, откуда

$$N^3 - (N-1)^3 = 3N^2 - 3N + 1.$$

Подставим в качестве N все возможные значения от 1 до n.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
n^3 & - & (n-1)^3 & = & 3n^2 & - & 3n & + & 1 \\
(n-1)^3 & - & (n-2)^3 & = & 3(n-1)^2 & - & 3(n-1) & + & 1 \\
(n-2)^3 & - & (n-3)^3 & = & 3(n-2)^2 & - & 3(n-2) & + & 1 \\
\vdots & & & \vdots & & & & & \vdots \\
2^3 & - & 1^3 & = & 3\cdot 2^2 & - & 3\cdot 2 & + & 1 \\
1^3 & - & 0^3 & = & 3\cdot 1^2 & - & 3\cdot 1 & + & 1
\end{array}\right.$$

Сложим все эти равенства. В левой части уничтожатся все слагаемые кроме n^3 и 0^3. Таким образом, получаем:

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Отсюда можно выразить сумму квадратов:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3-n}{3} + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^3-n}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= (n+1)\left(\frac{n^2-n}{3} + \frac{n}{2}\right) = (n+1)\left(\frac{2n^2-2n+3n}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Упражнения для самостоятельного решения

1) Суммируя разность $N^4 - (N-1)^4$ и пользуясь уже известными формулами для треугольного числа $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и суммы квадратов $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

2) *(для тех, кто не боится длинных выкладок)* Суммируя разность $N^5 - (N-1)^5$, выведите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

Версия документа: t2023a-5-gf76918c
Дата сборки: Вс 08 окт 2023 19:58:38 MSK